

9.4 正規母集団の母平均の仮説検定

小標本のときつまり標本が大きいときに適用できる母平均の仮説検定について述べる。但し、以下に述べる方法が適用できるのは母集団が正規母集団（母集団分布が正規分布である無限母集団）であるときに限る。

母平均が μ である正規母集団から無作為抽出した正規標本に対して、標本の大きさを n とおき、標本の平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおき、標本の不偏分散を表す確率変数 U とおく。定理9.2.5により、確率変数

$$T = \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - \mu)$$

は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。 t 分布を用いる検定を t 検定という。

与えられた実数 m に対して仮説 $\mu \neq m$ 或いは $\mu > m$ 或いは $\mu < m$ を検討する。母平均 μ は分からないので、確率変数 $T = \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - \mu)$ は実現値を計算できないので検定統計量にできない。そこで、 μ を与えられた実数 m で置き換えた確率変数

$$Q = \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - m)$$

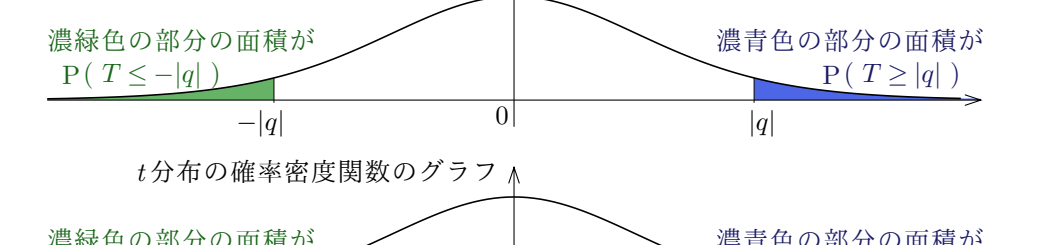
を検定統計量とする。0 に近い正の実数 α を有意水準とする。

仮説 $\mu \neq m$ を検討する。帰無仮説 $\mu = m$ を立てる。

$$T = \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - \mu) = \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - m) = Q.$$

検定統計量 Q は t 分布に従うので、 Q の値が 0 から離れるほど、つまり、 Q の値の絶対値が大きいほど、確率的に不自然なので、帰無仮説 $\mu = m$ は疑わしい。

t 分布の確率密度関数のグラフ



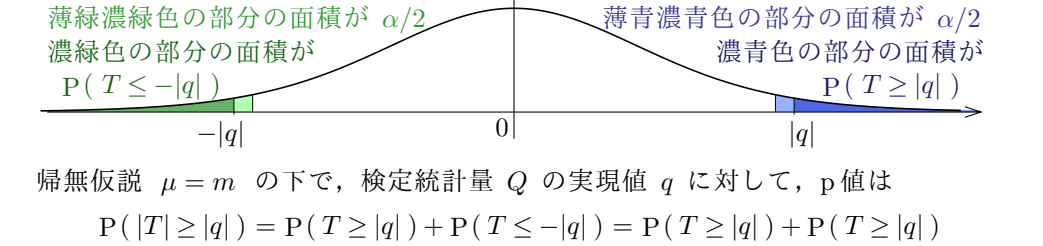
そこで Q の実現値の絶対値がある実数より大きいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（ t 分布では 0）の左右両側にあるとき、両側検定という。

帰無仮説 $\mu = m$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な実数になる確率は

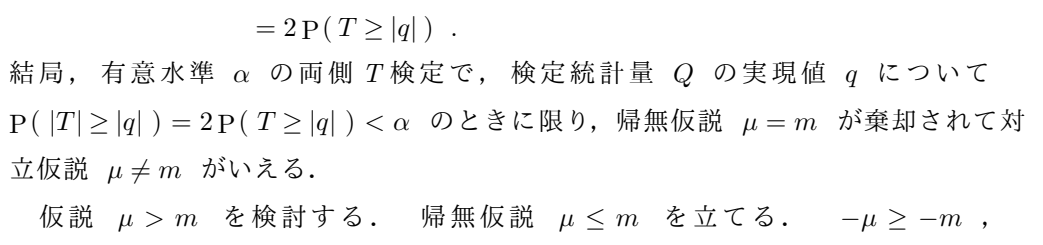
$$P(|Q| \geq |q|) = P(|T| \geq |q|) = P(T \geq |q|) + P(T \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が大きいので確率的に不自然である。

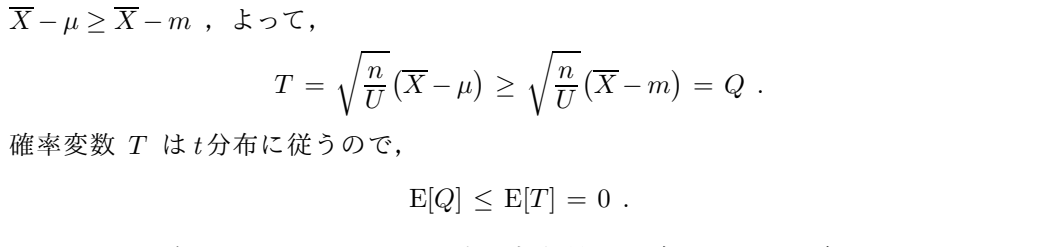
t 分布の確率密度関数のグラフ



t 分布の確率密度関数のグラフ

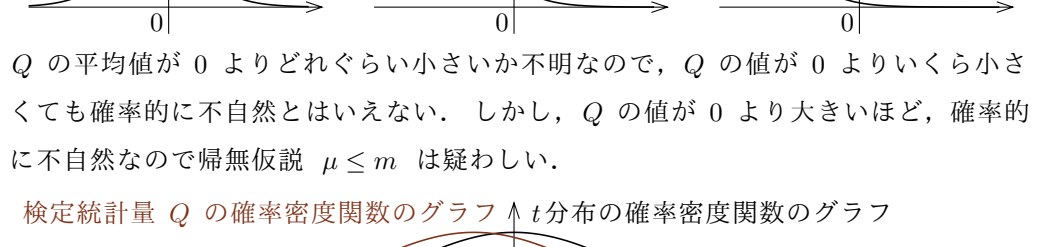


t 分布の確率密度関数のグラフ



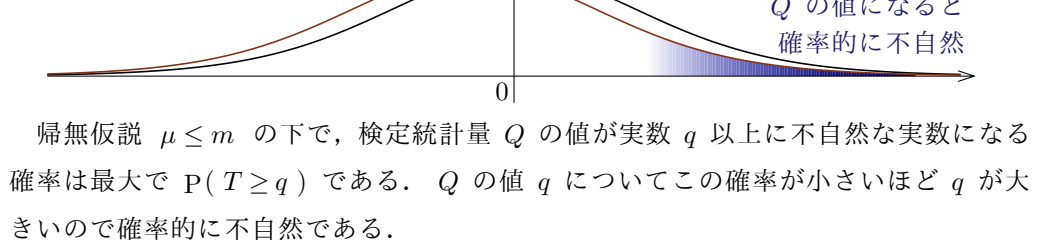
検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(|T| \geq |q|)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる。

t 分布の確率密度関数のグラフ



p 値 $P(|T| \geq |q|)$ が有意水準 α より小さいとき、甚だ不自然と考えて、帰無仮説を棄却する。

t 分布の確率密度関数のグラフ



帰無仮説 $\mu = m$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対して、 p 値は

$$P(|T| \geq |q|) = P(T \geq |q|) + P(T \leq -|q|) = P(T \geq |q|) + P(T \geq |q|) = 2P(T \geq |q|).$$

結局、有意水準 α の両側 t 検定で、検定統計量 Q の実現値 q について $P(|T| \geq |q|) = 2P(T \geq |q|) < \alpha$ のときに限り、帰無仮説 $\mu = m$ が棄却されて対立仮説 $\mu \neq m$ がいえる。

仮説 $\mu > m$ を検討する。帰無仮説 $\mu \leq m$ を立てる。 $-\mu \geq -m$ 、 $\overline{X} - \mu \geq \overline{X} - m$ 、よって、

$$T = \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - m) = Q.$$

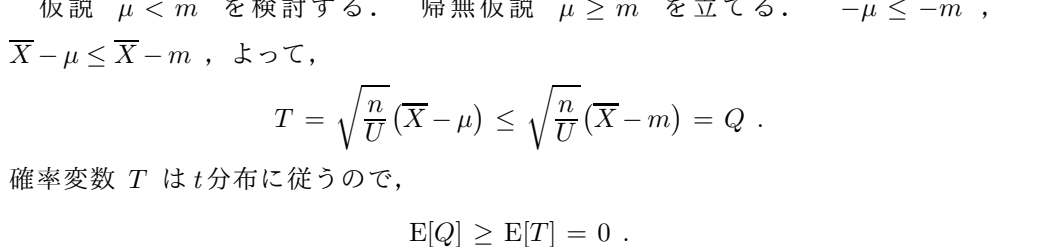
確率変数 T は t 分布に従うので、

$$E[Q] \leq E[T] = 0.$$

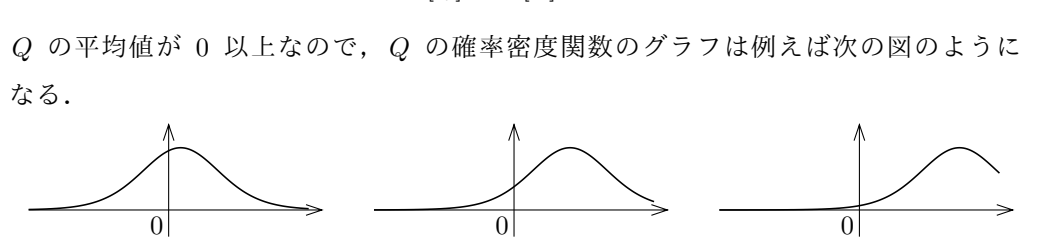
Q の平均値が 0 以下なので、 Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる。

Q の平均値が 0 よりどれぐらい小さいか不明なので、 Q の値が 0 よりいくらか小さくても確率的に不自然とはいえない。しかし、 Q の値が 0 より大きいほど、確率的に不自然なので帰無仮説 $\mu \leq m$ は疑わしい。

検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ

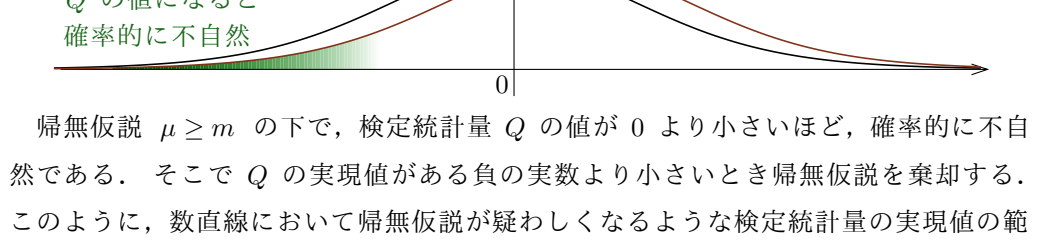


t 分布の確率密度関数のグラフ

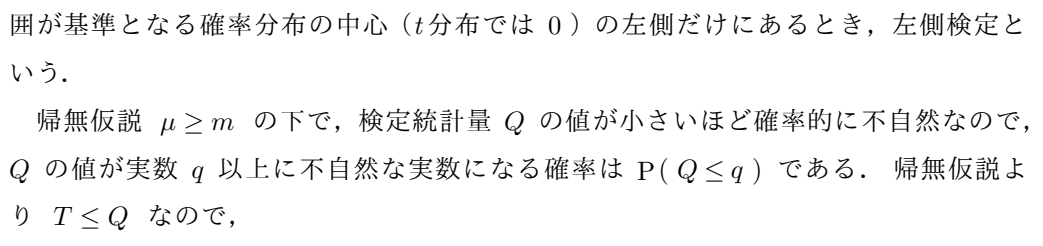


帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な実数になる確率は最大で $P(T \geq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である。

検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ

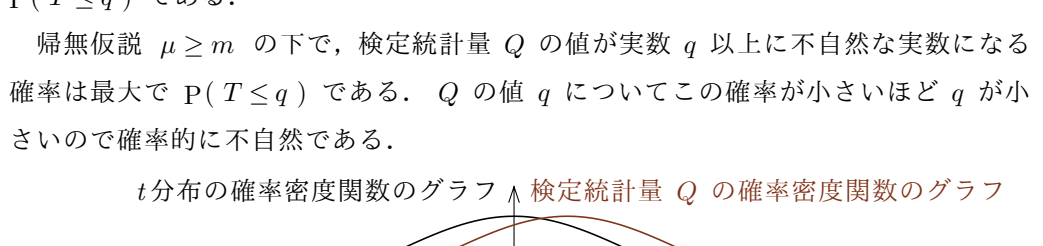


t 分布の確率密度関数のグラフ

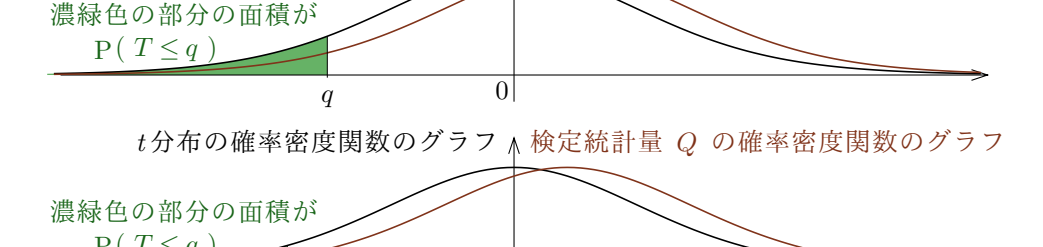


検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(T \geq q)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる。

検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ

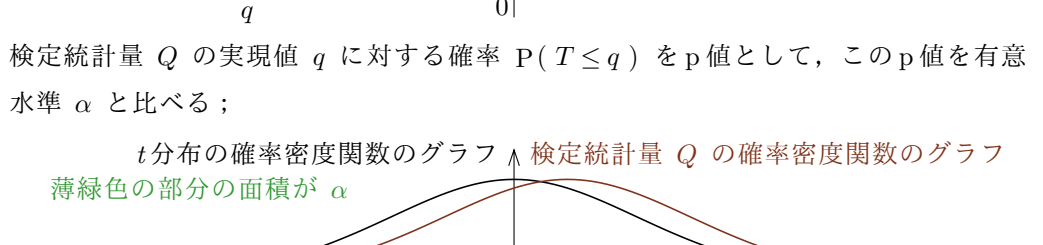


t 分布の確率密度関数のグラフ

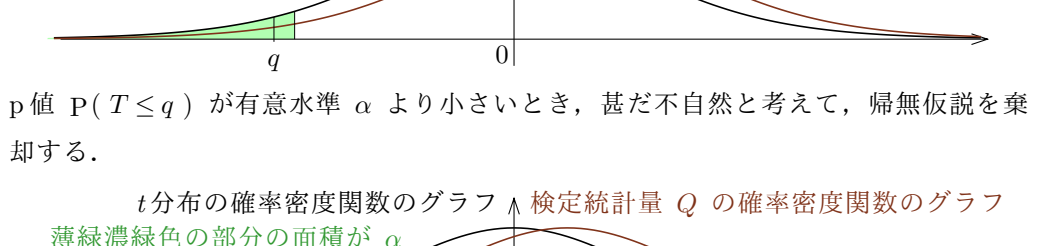


p 値 $P(T \geq q)$ が有意水準 α より小さいとき、甚だ不自然と考えて、帰無仮説を棄却する。

検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ



t 分布の確率密度関数のグラフ



結局、有意水準 α の右側 T 検定で、検定統計量 Q の実現値 q について $P(T \geq q) < \alpha$ のときに限り、帰無仮説 $\mu \leq m$ が棄却されて対立仮説 $\mu > m$ がいえる。

仮説 $\mu < m$ を検討する。帰無仮説 $\mu \geq m$ を立てる。 $-\mu \leq -m$ 、 $\overline{X} - \mu \leq \overline{X} - m$ 、よって、

$$T = \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - m) = Q.$$

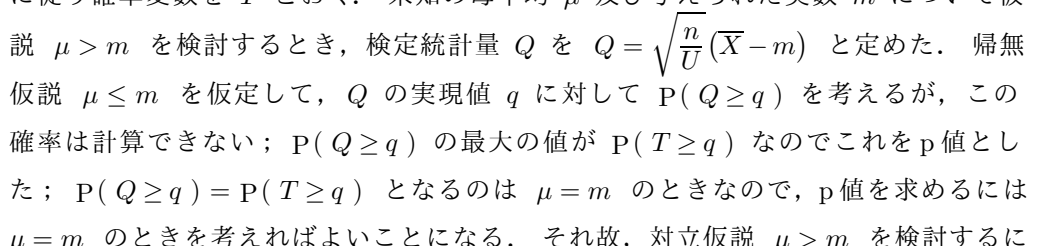
確率変数 T は t 分布に従うので、

$$E[Q] \geq E[T] = 0.$$

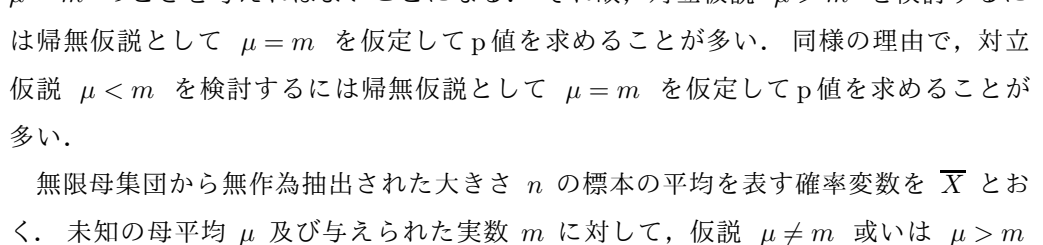
Q の平均値が 0 以上なので、 Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる。

Q の平均値が 0 よりどれぐらい大きいかわからないので、 Q の値が 0 よりいくらか大きくても確率的に不自然とはいえない。しかし、 Q の値が 0 より小さいほど、確率的に不自然なので帰無仮説 $\mu \geq m$ は疑わしい。

t 分布の確率密度関数のグラフ



検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ



帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（ t 分布では 0）の左側だけにあるとき、左側検定という。

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が小さいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な実数になる確率は $P(Q \leq q)$ である。帰無仮説より $T \leq Q$ なので、

$$Q \leq q \text{ ならば } T \leq q,$$

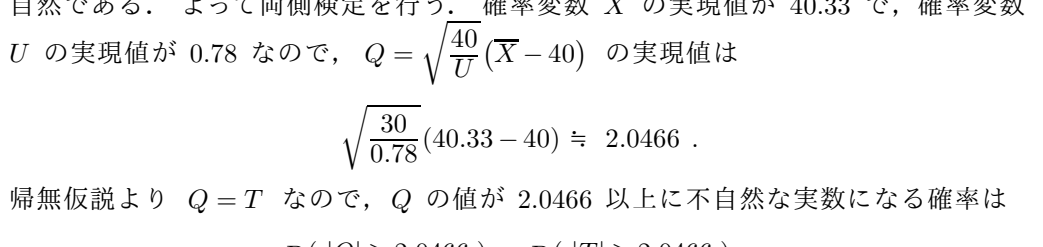
よって

$$P(Q \leq q) \leq P(T \leq q).$$

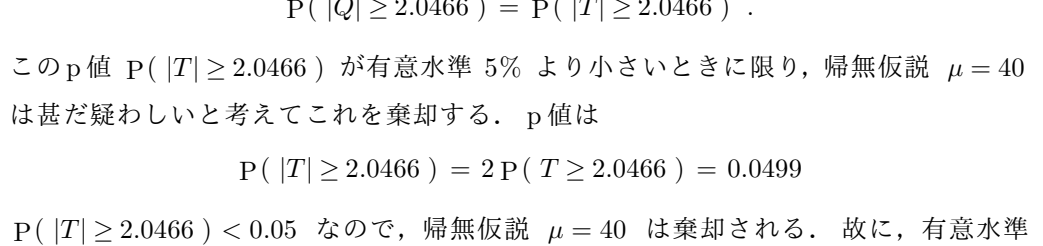
帰無仮説の下で検定統計量 Q の値が q 以上に不自然な実数になる確率は最大で $P(T \leq q)$ である。

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な実数になる確率は最大で $P(T \leq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が小さいので確率的に不自然である。

t 分布の確率密度関数のグラフ

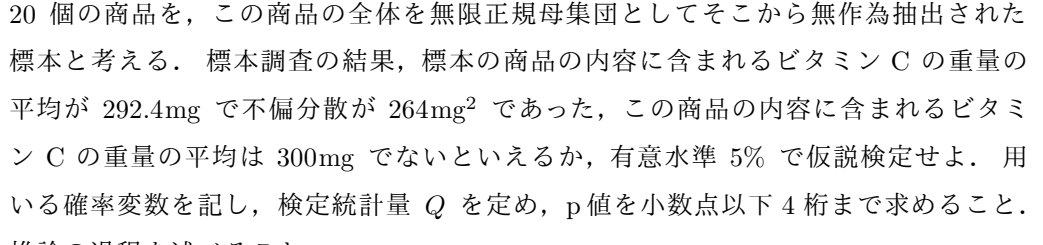


検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ



検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(T \leq q)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる；

t 分布の確率密度関数のグラフ



濃緑色の部分の面積が $P(T \leq q)$

結局、有意水準 α の左側 T 検定で、検定統計量 Q の実現値 q について $P(T \leq q) < \alpha$ のときに限り、帰無仮説 $\mu \geq m$ が棄却されて対立仮説 $\mu < m$ がいえる。

右側検定と左側検定とを併せて片側検定という。

[公式 9.4] 正規母集団から無作為抽出された大きさ n の正規標本について、標本平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおき、標本不偏分散を表す確率変数を U とおく。自由度 $n-1$ の t 分布に従う確率変数を T とおく。実数 α は 0 に近い正の数であるとする。未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m に対して、仮説 $\mu \neq m$ 或いは $\mu > m$ 或いは $\mu < m$ を検討するとき、検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - m)$ と定めると次のようになる。

(1) 有意水準 α の両側 t 検定で、検定統計量 Q の実現値 q に対する p 値 $P(|T| \geq |q|) = 2P(T \geq |q|)$ が α より小さいときに限り、帰無仮説 $\mu = m$ は棄却されて対立仮説 $\mu \neq m$ がいえる。

(2) 有意水準 α の右側 t 検定で、検定統計量 Q の実現値 q に対する p 値 $P(T \geq q)$ が α より小さいときに限り、帰無仮説 $\mu \leq m$ は棄却されて対立仮説 $\mu > m$ がいえる。

(3) 有意水準 α の左側 t 検定で、検定統計量 Q の実現値 q に対する p 値 $P(T \leq q)$ が α より小さいときに限り、帰無仮説 $\mu \geq m$ は棄却されて対立仮説 $\mu < m$ がいえる。

正規母集団から無作為抽出された大きさ n の標本の、標本平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおき、標本不偏分散を表す確率変数を U とおく。自由度 $n-1$ の t 分布に従う確率変数を T とおく。未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m について仮説 $\mu > m$ を検討するとき、検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - m)$ と定めた。帰無仮説 $\mu \leq m$ を仮定して、 Q の実現値 q に対して $P(Q \geq q)$ を考えるが、この確率は計算できない； $P(Q \geq q)$ の最大の値が $P(T \geq q)$ なのでこれを p 値とした； $P(Q \geq q) = P(T \geq q)$ となるのは $\mu = m$ のときなので、 p 値を求めるには $\mu = m$ のときを考えればよいことになる。それ故、対立仮説 $\mu > m$ を検討するには帰無仮説として $\mu = m$ を仮定して p 値を求めることが多い。同様の理由で、対立仮説 $\mu < m$ を検討するには帰無仮説として $\mu = m$ を仮定して p 値を求めることが多い。

無限母集団から無作為抽出された大きさ n の標本の平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく。未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m に対して、仮説 $\mu \neq m$ 或いは $\mu > m$ 或いは $\mu < m$ を検討する。0 に近い正の実数 α を有意水準とする。

(1) 標本の大きさ n が充分大きいとき、標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z と、標本の不偏分散を u として検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ とを考え、 Z 検定を行う； Q の実現値 q について、 $P(|Z| \geq |q|) < \alpha$ のとき $\mu \neq m$ とし、 $P(Z \geq q) < \alpha$ のとき $\mu > m$ といえ、 $P(Z \leq q) < \alpha$ のとき $\mu < m$ といえる。

(2) 母集団が正規母集団であるとき、自由度 $n-1$ の t 分布に従う確率変数 T と、標本の不偏分散を表す確率変数を U とおき検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - m)$ とを考え、 t 検定を行う； Q の実現値 q について、 $P(|T| \geq |q|) < \alpha$ のとき $\mu \neq m$ といえ、 $P(T \geq q) < \alpha$ のとき $\mu > m$ といえ、 $P(T \leq q) < \alpha$ のとき $\mu < m$ といえる。

[例] 正規母集団から無作為抽出された大きさが 30 である標本の平均が 40.33 であり不偏分散が 0.78 であるとする。母平均は 40 でないといえるか、 p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母平均が μ である正規母集団から無作為抽出された大きさ 30 の標本の平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおき不偏分散を表す確率変数を U とおく。確率変数 $T = \sqrt{\frac{30}{U}}(\overline{X} - \mu)$ は自由度 29 の t 分布に従う。

母平均 μ について $\mu \neq 40$ かどうか検討するので、帰無仮説 $\mu = 40$ を立てる。検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{30}{U}}(\overline{X} - 40)$ と定める。帰無仮説 $\mu = 40$ より、

$$T = \sqrt{\frac{30}{U}}(\overline{X} - \mu) = \sqrt{\frac{30}{U}}(\overline{X} - 40) = Q.$$

T は t 分布に従うので $E[Q] = E[T] = 0$ 。 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然である。よって両側検定を行う。確率変数 $\overline{X}$ の実現値が 40.33 で、確率変数 U の実現値が 0.78 なので、 $Q = \sqrt{\frac{40}{U}}(\overline{X} - 40)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{30}{0.78}}(40.33 - 40) \approx 2.0466.$$

帰無仮説より $Q = T$ なので、 Q の値が 2.0466 以上に不自然な実数になる確率は $P(|Q| \geq 2.0466) = P(|T| \geq 2.0466)$ 。

この p 値 $P(|T| \geq 2.0466)$ が有意水準 5% より小さいときに限り、帰無仮説 $\mu = 40$ は甚だ疑わしいと考えてこれを棄却する。 p 値は

$$P(|T| \geq 2.0466) = 2P(T \geq 2.0466) = 0.0499$$

$P(|T| \geq 2.0466) < 0.05$ なので、帰無仮説 $\mu = 40$ は棄却される。故に、有意水準 5% の両側 t 検定で、母平均は 40 でないといえる。 **[88]**

[問 9.4.1] ある蜜柑ジュースの商品のパックにはそのパック内のジュースに含まれるビタミン C の重量が 300mg と記載されている。この商品をあちこちから 20 個買い集め、それらの内容のジュースに含まれるビタミン C の重量を調べる。選ばれた 20 個の商品を、この商品の全体を無限正規母集団としてそこから無作為抽出された標本と考える。標本調査の結果、標本の商品の内容に含まれるビタミン C の重量の平均が 292.4mg で不偏分散が 264mg² であった、この商品の内容に含まれるビタミン C の重量の平均は 300mg でないといえるか、有意水準 5% で仮説検定せよ。用いる確率変数を記し、検定統計量 Q を定め、 p 値を小数点以下 4 桁まで求めること。推論の過程を述べること。

[例] 正規母集団から無作為抽出された大きさが 50 である標本の平均が 60.27 であり不偏分散が 1.30 であるとする。母平均は 60 より大きいといえるか、 p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母平均が μ である正規母集団から無作為抽出された大きさ 50 の標本の平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおき不偏分散を表す確率変数を U とおく。確率変数 $T = \sqrt{\frac{50}{U}}(\overline{X} - \mu)$ は自由度 49 の t 分布に従う。

母平均 μ について $\mu > 60$ かどうか検討するので、帰無仮説 $\mu \leq 60$ を立てる。検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{50}{U}}(\overline{X} - 60)$ と定める。帰無仮説 $\mu \leq 60$ より、

$$T = \sqrt{\frac{50}{U}}(\overline{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{50}{U}}(\overline{X} - 60) = Q.$$

T は t 分布に従うので $E[Q] \geq E[T] = 0$ 。 Q の値が 0 より大きいほど確率的に不自然である。よって右側検定を行う。確率変数 $\overline{X}$ の実現値が 60.27 で、確率変数 U の実現値が 1.30 なので、 $Q = \sqrt{\frac{50}{U}}(\overline{X} - 60)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{50}{1.30}}(60.27 - 60) \approx 1.6745.$$

帰無仮説より $T \geq Q$ なので、 $Q \geq 1.6745$ ならば $T \geq 1.6745$ 、よって $P(Q \geq 1.6745) \leq P(T \geq 1.6745)$ 。

帰無仮説の下で Q の値が 1.6745 以上に不自然な実数になる確率は最大で $P(T \geq 1.6745)$ である。この p 値 $P(T \geq 1.6745)$ が有意水準 5% より小さいときに限り、帰無仮説 $\mu \leq 60$ は甚だ疑わしいと考えてこれを棄却する。 p 値は

$$P(T \geq 1.6745) \approx 0.0502.$$

$P(T \geq 1.6745) < 0.05$ なので、帰無仮説 $\mu \leq 60$ は棄却されない。故に、有意水準 5% の右側 t 検定で、母平均は 60 より大きいといえない。

大きさ 50 の標本は大標本と考えることもある。この例で標本を大標本と考えて p 値を求めてみる。標準正規分布に従う確率変数を Z とおき、 Z の累積分布関数を Φ とおくと、右側 Z 検定での p 値は

$$P(Z \geq 1.6745) = 1 - P(Z \leq 1.6745) = 1 - \Phi(1.6745) \approx 0.0470.$$

よって帰無仮説 $\mu \leq 60$ は棄却される。故に、有意水準 5% の右側 Z 検定では母平均は 60 より大きいといえる。

このように、同じ帰無仮説 $\mu \leq 60$ が、 t 検定では棄却されなくて Z 検定では棄却される。このようなとき Z 検定と t 検定とのどちらの結果が妥当であるかは、母集団を正規母集団と見做すことの妥当性による。微妙なときはどちらの検定を行ったか断ることが望ましいであろう。 **[89]**

[問 9.4.2] ある電器会社である新種のスマートフォン用バッテリーを 40 個試作して、それらの特定条件下での持続時間を調べた。試作した 40 個のバッテリーを商品化して生産する場合のバッテリーの全体を無限正規母集団としてそこから無作為抽出された標本と考える。調査の結果、標本の試作品のバッテリーの耐久時間の平均が 12.24h で不偏分散が 0.39h² であった。この製品の耐久時間の平均は 12h より長いといえるか、有意水準 1% で仮説検定せよ。用いる確率変数を記し、検定統計量 Q を定め、 p 値を小数点以下 4 桁まで求めること。推論の過程を述べること。

[例] 正規母集団から無作為抽出された大きさが 20 である標本の平均が 78.6 であり不偏分散が 6.1 であるとする。母平均は 80 より小さいといえるか、 p 値を求めて有意水準 1% で仮説検定する。

母平均が μ である正規母集団から無作為抽出された大きさ 20 の標本の平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおき不偏分散を表す確率変数を U とおく。確率変数 $T = \sqrt{\frac{20}{U}}(\overline{X} - \mu)$ は自由度 19 の t 分布に従う。

母平均 μ について $\mu < 80$ かどうか検討するので、帰無仮説 $\mu \geq 80$ を立てる。検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{20}{U}}(\overline{X} - 80)$ と定める。帰無仮説 $\mu \geq 80$ より、

$$T = \sqrt{\frac{20}{U}}(\overline{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{20}{U}}(\overline{X} - 80) = Q.$$

T は t 分布に従うので $E[Q] \geq E[T] = 0$ 。 Q の値が 0 より小さいほど確率的に不自然である。よって左側検定を行う。確率変数 $\overline{X}$ の実現値が 78.6 で、確率変数 U の実現値が 6.1 なので、 $Q = \sqrt{\frac{20}{U}}(\overline{X} - 80)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{50}{6.1}}(78.6 - 80) \approx -2.5350.$$

帰無仮説より $T \leq Q$ なので、 $Q \leq -2.5350$ ならば $T \leq -2.5350$ 、よって $P(Q \leq -2.5350) \leq P(T \leq -2.5350)$ 。

帰無仮説の下で Q の値が -2.5350 以上に不自然な実数になる確率は最大で $P(T \leq -2.5350)$ である。この p 値 $P(T \leq -2.5350)$ が有意水準 1% より小さいときに限り、帰無仮説 $\mu \geq 80$ は甚だ疑わしいと考えてこれを棄却する。 p 値は

$$P(T \leq -2.5350) = P(T \geq 2.5350) \approx 0.0101.$$

$P(T \leq -2.5350) < 0.01$ なので、帰無仮説 $\mu \leq 80$ は棄却されない。故に、有意水準 1% の左側 t 検定で、母平均は 80 より小さいといえない。 **[89]**