

§ 9.3 正規母集団の母平均の区間推定

小標本のときつまり標本が大きくないときにも適用できる母平均の区間推定について述べる．但し，以下に述べる方法が適用できるのは母集団が正規母集団（母集団分布が正規分布である無限母集団）であるときに限る．

t 分布を用いる．自由度 n の t 分布の相補累積分布関数の逆関数を t_n とおく．自由度 n の t 分布に従う確率変数 T 及び実数 a 及び $0 < \alpha < 1$ である実数 α について、

$$P(T \geq a) = \alpha \iff a = t_n(\alpha) .$$

母平均が μ である正規母集団から無作為抽出した大きさ n ($n \geq 2$) の正規標本において、平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおき、不偏分散を表す確率変数を U とおく．定理9.2.5により、確率変数

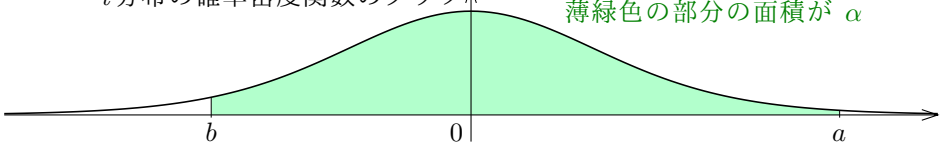
$$T = \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - \mu)$$

は自由度 $n-1$ の t 分布に従う．このことを元に母平均 μ の信頼区間を求める．1より小さく1に近い実数 α を信頼度とする．

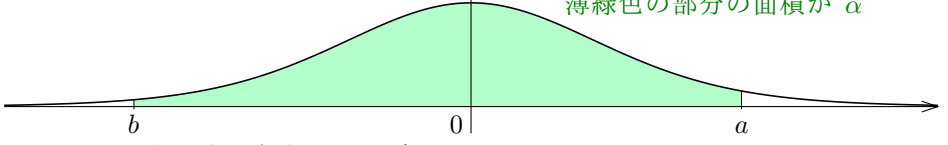
t 分布に従う確率変数を T に対して、次の様な実数 a, b を考える：

$$P(b \leq T \leq a) = \alpha .$$

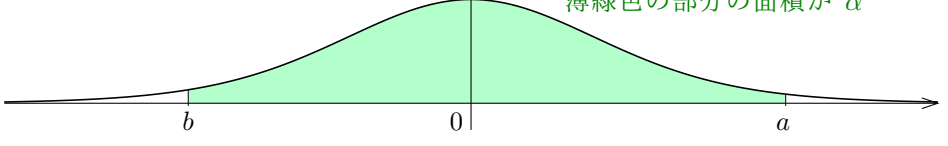
t 分布の確率密度関数のグラフ↑



t 分布の確率密度関数のグラフ↑

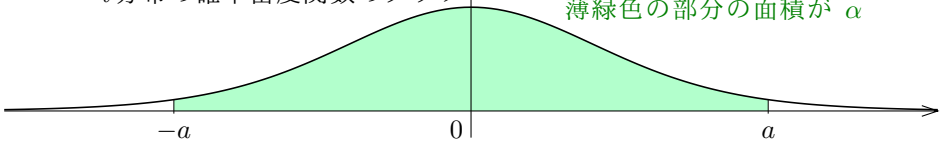


t 分布の確率密度関数のグラフ↑



信頼区間をなるべく狭くするために、 $P(b \leq T \leq a) = \alpha$ である実数 a と b との間隔 $a-b$ をなるべく小さくする． t 分布の確率密度関数は偶関数なので、 $b = -a$ とする．

t 分布の確率密度関数のグラフ↑



$P(-a \leq T \leq a) = \alpha$ である実数 a を求める．

$$\begin{aligned} P(-a \leq T \leq a) &= P(T \leq a) - P(T \leq -a) = 1 - P(T \geq a) - P(T \geq a) \\ &= 1 - 2P(T \geq a) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-a \leq T \leq a) = \alpha &\iff 1 - 2P(T \geq a) = \alpha \iff 2P(T \geq a) = 1 - \alpha \\ &\iff P(T \geq a) = \frac{1 - \alpha}{2} . \end{aligned}$$

確率変数 T は自由度 $n-1$ の t 分布に従うので、

$$P(T \geq a) = \frac{1 - \alpha}{2} \iff a = t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) .$$

故に $a = t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right)$ について $P(-a \leq T \leq a) = \alpha$ なので、

$$P\left(-t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) \leq T \leq t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right)\right) = \alpha .$$

$T = \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - \mu)$ なので、

$$P\left(-t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) \leq \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - \mu) \leq t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right)\right) = \alpha .$$

ここで

$$\begin{aligned} &-t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) \leq \sqrt{\frac{n}{U}}(\overline{X} - \mu) \leq t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) \\ \iff &-\sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) \leq \overline{X} - \mu \leq \sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) \\ \iff &\sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) \geq \mu - \overline{X} \geq -\sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) \\ \iff &-\sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) \leq \mu - \overline{X} \leq \sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) \\ \iff &\overline{X} - \sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) \leq \mu \leq \overline{X} + \sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) . \end{aligned}$$

よって

$$P\left(\overline{X} - \sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) \leq \mu \leq \overline{X} + \sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right)\right) = \alpha .$$

標本平均を表す確率変数 $\overline{X}$ と不偏分散を表す確率変数 U について、

$$\overline{X} - \sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right) \leq \mu \leq \overline{X} + \sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right)$$

となる確率は α である．故に、標本の平均 $\overline{x}$ 及び不偏分散 u に対して、区間

$$\left[\overline{x} - \sqrt{\frac{u}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right), \overline{x} + \sqrt{\frac{u}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right)\right]$$

が母平均値 μ の信頼度 α の信頼区間である．

[公式 9.3] 自然数 n について $n \geq 2$ とする．自由度 $n-1$ の t 分布の相補累積分布関数の逆関数を t_{n-1} とおく．実数 α について $0 < \alpha < 1$ とする．正規母集団から無作為抽出した大きさ n の正規標本の平均 $\overline{x}$ 及び不偏分散 u に対して、母平均の信頼度 α の信頼区間は

$$\left[\overline{x} - \sqrt{\frac{u}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right), \overline{x} + \sqrt{\frac{u}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right)\right]$$

で与えられる．

実数 α について $0 < \alpha < 1$ とする．無限母集団から無作為抽出した大きさ n の標本の標本平均を $\overline{x}$ とおき標本の不偏分散を u とおく．母平均の信頼度 α の信頼区間は次のようになる：

(1) 標本の大きさ n が充分大きいときは、標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおくと、

$$\left[\overline{x} - \sqrt{\frac{u}{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{1 + \alpha}{2}\right), \overline{x} + \sqrt{\frac{u}{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{1 + \alpha}{2}\right)\right] ;$$

(2) 母集団が正規母集団であるときは、自由度 $n-1$ の t 分布の相補累積分布関数の逆関数を t_{n-1} とおいて

$$\left[\overline{x} - \sqrt{\frac{u}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right), \overline{x} + \sqrt{\frac{u}{n}}t_{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{2}\right)\right] .$$

[例] 正規母集団から無作為抽出した大きさ 20 の標本の平均が 70 で不偏分散が 30 であるとする．母平均の信頼度 95% の信頼区間を求める．

母平均の信頼度 95% の信頼区間は

$$\begin{aligned} \left[70 - \sqrt{\frac{30}{20}}t_{19}(0.025), 70 + \sqrt{\frac{30}{20}}t_{19}(0.025)\right] &\doteq \left[70 - \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 2.093, 70 + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 2.093\right] \\ &\doteq [67.44, 72.56] . \end{aligned}$$

[問9.3] 正規母集団から無作為抽出した大きさ 30 の標本の平均が 80 で不偏分散が 20 であるとする．母平均の信頼度 99% の信頼区間を求めよ．