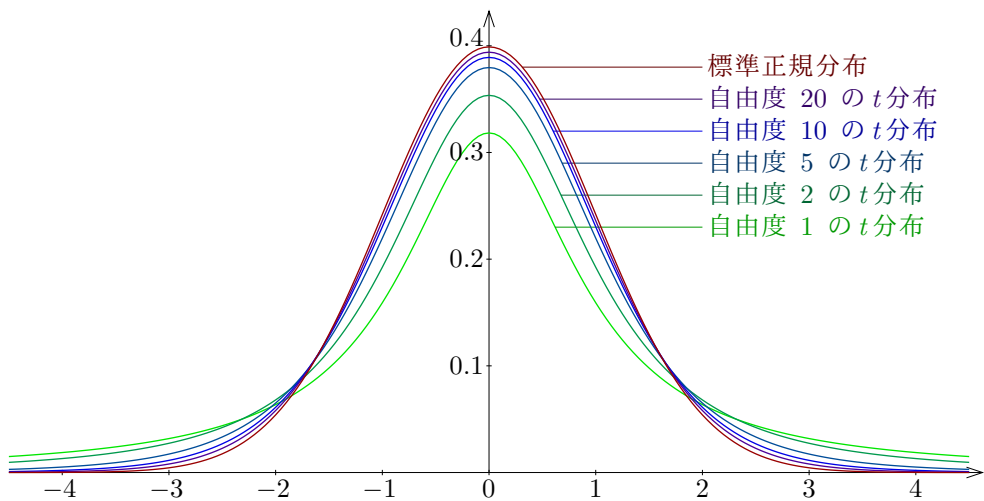


§ 9.2 t 分布

正の自然数 n に対して、標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z と自由度 n の χ^2 分布に従う確率変数 X とが互いに独立であるとき、確率変数 $Z\sqrt{\frac{n}{X}}$ が従う確率分布を自由度 n の t 分布という。

t 分布及び標準正規分布について確率密度関数のグラフは次のようになる。



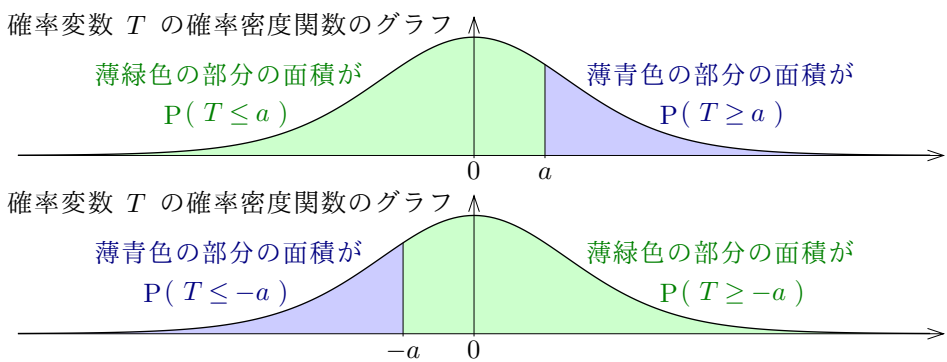
座標平面で t 分布の確率密度関数のグラフは縦の座標軸に関して対称である。

[定理 9.2.1] t 分布に従う確率変数の確率密度関数は偶関数である。

[定理 9.2.2] t 分布に従う確率変数の平均値は 0 である。

3 以上の自然数 n に対して、自由度 n の t 分布に従う確率変数 T の分散は $\frac{n}{n-2} = 1 + \frac{2}{n-2}$ である。 T の自由度が大きいほど T の分散は小さい。自由度 n を限りなく大きくしていくと、 T の分散は $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-2}\right) = 1$ に収束し、 T の確率密度関数は標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数に収束する。

t 分布に従う確率変数 T の確率密度関数のグラフにおいて以下の図のようになる。



[定理 9.2.3] t 分布に従う確率変数 T 及び実数 a について、

$$P(T \leq a) = P(T \geq -a), \quad P(T \geq a) = P(T \leq -a).$$

実数 μ 及び正の実数 σ に対して、正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従い互いに独立な n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の平均を表す確率変数 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うので、 $\bar{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。また、定理 9.1 により、 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の偏差平方和を表す確率変数 $S = \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$ に対して確率変数 $X = \frac{S}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う。故に、確率変数

$$Z\sqrt{\frac{n-1}{X}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sqrt{\frac{n-1}{\frac{S}{\sigma^2}}} = \sqrt{\frac{n(n-1)}{S}}(\bar{X} - \mu)$$

は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。約分によって σ が消えることが重要である。

[定理 9.2.4] n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ は総て同じ正規分布に従い、互いに独立であるとする。それらの平均値を μ とおく。 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の平均を表す確率変数 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ 及び偏差平方和を表す確率変数 $S = \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$ に対して、確率変数 $\sqrt{\frac{n(n-1)}{S}}(\bar{X} - \mu)$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。

この定理を標本分布に適用する。

母平均が μ である正規母集団から無作為抽出した大きさ n の標本の標本確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ は、総て同じ正規分布に従い、互いに独立で、それら平均値は μ である。先述の定理 9.2.4 により、標本の平均を表す確率変数 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ 及び標本の偏差平方和を表す確率変数 $S = \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$ に対して、確率変数 $\sqrt{\frac{n(n-1)}{S}}(\bar{X} - \mu)$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。標本の不偏分散を表す確率変数 $U = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}) = \frac{S}{n-1}$ について、 $S = U(n-1)$ なので、

$$\sqrt{\frac{n(n-1)}{S}}(\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{n(n-1)}{U(n-1)}}(\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{n}{U}}(\bar{X} - \mu).$$

この確率変数が自由度 $n-1$ の t 分布に従う。

[定理 9.2.5] 母平均が μ である正規母集団から無作為抽出した大きさ n ($n \geq 2$) の正規標本において、平均を表す確率変数を $\bar{X}$ とおき、不偏分散を表す確率変数を U とおくとき、確率変数 $\sqrt{\frac{n}{U}}(\bar{X} - \mu)$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。

確率変数 X について、各実数 x に対して $F(x) = P(X \leq x)$ である関数 F を X の累積分布関数といった。 X について、各実数 x に対して $F(x) = P(X > x)$ である関数 F を X の相補累積分布関数という。

t 分布は、推定や検定に用いられることが多いので、相補累積分布関数を考えることが多い。正の自然数 n に対する自由度 n の t 分布に従う確率変数 T の相補累積分布関数を F とおく：

$$\text{各実数 } t \text{ について } F(t) = P(T > t) = P(T \geq t).$$

F の逆関数 F^{-1} がある。 $0 < \alpha < 1$ である実数 α における関数 F^{-1} の値 $F^{-1}(\alpha)$ を $t_n(\alpha)$ と書き表す。実数 a について、

$$a = t_n(\alpha) \iff a = F^{-1}(\alpha) \iff F(a) = \alpha \iff P(T \geq a) = \alpha.$$

$t_n(\alpha)$ は、自由度 n の t 分布に従う確率変数 T について $P(T \geq a) = \alpha$ である実数 a を表す¹⁾；このときの実数 a を T の上側 α 点という。

¹⁾ 0 に近い正の実数 α に対して、自由度 n の t 分布に従う確率変数を T について $P(|T| \geq a) = \alpha$ である実数 a を $t_n(\alpha)$ と表記することもある。