

§ 8.4 大標本による母平均の差の検定

母平均が μ_A であり母標準偏差が σ_A である無限母集団 A から無作為抽出された標本の大きさ n_A が充分大きいとする．定理 5.3 によりこの標本の平均を表す確率変数 $\overline{X}_A$ は近似的に正規分布 $N\left(\mu_A, \frac{\sigma_A^2}{n_A}\right)$ に従う．また、母平均が μ_B であり母標準偏差が σ_B である無限母集団 B から無作為抽出された標本の大きさ n_B が充分大きいとする．定理 5.3 によりこの標本の平均を表す確率変数 $\overline{X}_B$ は近似的に正規分布 $N\left(\mu_B, \frac{\sigma_B^2}{n_B}\right)$ に従う．確率変数 $\overline{X}_A$ と $\overline{X}_B$ とは互いに独立であるとする．定理 4.1.1 により、

$$\begin{aligned} E[\overline{X}_A - \overline{X}_B] &= E[\overline{X}_A] - E[\overline{X}_B] = \mu_A - \mu_B \\ V[\overline{X}_A - \overline{X}_B] &= V[\overline{X}_A] + V[\overline{X}_B] = \frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B} \end{aligned}$$

定理 4.1.2 により、確率変数 $\overline{X}_A - \overline{X}_B$ は近似的に正規分布 $N\left(\mu_A - \mu_B, \frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}\right)$ に従う．標本調査では母分散は通常は分からない．標本の大きさ n_A, n_B が充分に大きいので、標本の不偏分散が母分散とほぼ一致すると考えて、通常は、母集団 A の母分散 σ_A^2 を標本の不偏分散 u_A で代替し、母集団 B の母分散 σ_B^2 を標本の不偏分散 u_B で代替する．標本調査では数学的根拠において確率が厳密な値か近似値かに拘ることにあまり意味がないので、確率変数 $\overline{X}_A - \overline{X}_B$ は正規分布 $N\left(\mu_A - \mu_B, \frac{u_A}{n_A} + \frac{u_B}{n_B}\right)$ に従うとして確率を考える．確率変数 $\overline{X}_A - \overline{X}_B$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B - \mu_A + \mu_B}{\sqrt{\frac{u_A}{n_A} + \frac{u_B}{n_B}}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．標準正規分布を用いる仮説検定を Z 検定という．

仮説 $\mu_A \neq \mu_B$ 及び仮説 $\mu_A > \mu_B$ を検討する．近似的に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 $Z = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B - \mu_A + \mu_B}{\sqrt{\frac{u_A}{n_A} + \frac{u_B}{n_B}}}$ に対して、検定統計量 Q を

$$Q = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\frac{u_A}{n_A} + \frac{u_B}{n_B}}}$$

と定める．0 に近い正の実数 α を有意水準とする．

仮説 $\mu_A \neq \mu_B$ を検討する．帰無仮説 $\mu_A = \mu_B$ を立てる． $-\mu_A + \mu_B = 0$ なので、

$$Z = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B - \mu_A + \mu_B}{\sqrt{\frac{u_A}{n_A} + \frac{u_B}{n_B}}} = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\frac{u_A}{n_A} + \frac{u_B}{n_B}}} = Q$$

検定統計量 Q は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので、 Q の値が 0 から離れるほど、つまり、 Q の値の絶対値が大きいほど、確率的に不自然なので、帰無仮説 $\mu_A = \mu_B$ は疑わしい．

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

Q の値になると確率的に不自然

そこで Q の実現値の絶対値がある実数より大きいとき帰無仮説を棄却する．このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左右両側にあるとき、両側検定という．

帰無仮説 $\mu_A = \mu_B$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な実数になる確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|)$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が大きいので確率的に不自然である．

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

濃緑色の部分の面積が $P(Z \leq -|q|)$

濃青色の部分の面積が $P(Z \geq |q|)$

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

濃緑色の部分の面積が $P(Z \leq -|q|)$

濃青色の部分の面積が $P(Z \geq |q|)$

検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(|Z| \geq |q|)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる．

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

薄緑色の部分の面積が $\alpha/2$

p 値 $P(|Z| \geq |q|)$ が有意水準 α より小さいとき、甚だ不自然と考えると、帰無仮説を棄却する．

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

薄緑濃緑色の部分の面積が $\alpha/2$

濃緑色の部分の面積が $P(Z \leq -|q|)$

薄青濃青色の部分の面積が $\alpha/2$

濃青色の部分の面積が $P(Z \geq |q|)$

帰無仮説 $\mu_A = \mu_B$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対して、 p 値は

$$\begin{aligned} P(|Z| \geq |q|) &= P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \geq |q|) \\ &= 2P(Z \geq |q|) \end{aligned}$$

結局、有意水準 α の両側 Z 検定で、検定統計量 Q の実現値 q について

$P(|Z| \geq |q|) = 2P(Z \geq |q|) < \alpha$ のときに限り、帰無仮説 $\mu_A = \mu_B$ が棄却されて対立仮説 $\mu_A \neq \mu_B$ がいえる．

仮説 $\mu_A > \mu_B$ を検討する．帰無仮説 $\mu_A \leq \mu_B$ を立てる． $-\mu_A + \mu_B = 0$ なので、

$$Z = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B - \mu_A + \mu_B}{\sqrt{\frac{u_A}{n_A} + \frac{u_B}{n_B}}} = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\frac{u_A}{n_A} + \frac{u_B}{n_B}}} = Q$$

確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので、

$$E[Q] \leq E[Z] = 0$$

Q の平均値が 0 以下なので、 Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる．

Q の平均値が 0 よりどれぐらい小さいか不明なので、 Q の値が 0 よりいくらか小さくても確率的に不自然とはいえない．しかし、 Q の値が 0 より大きいほど、確率的に不自然なので帰無仮説 $\mu_A \leq \mu_B$ は疑わしい．

検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

Q の値になると確率的に不自然

帰無仮説 $\mu_A \leq \mu_B$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な実数になる確率は最大で $P(Z \geq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である．

検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ

濃青色の部分の面積が $P(Z \geq q)$

検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ

濃青色の部分の面積が $P(Z \geq q)$

検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \geq q)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる．

検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ

薄青色の部分の面積が α

p 値 $P(Z \geq q)$ が有意水準 α より小さいとき、甚だ不自然と考えると、帰無仮説を棄却する．

検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ

薄青濃青色の部分の面積が α

濃青色の部分の面積が $P(Z \geq q)$

結局、有意水準 α の右側 Z 検定で、検定統計量 Q の実現値 q について

$P(Z \geq q) < \alpha$ のときに限り、帰無仮説 $\mu_A \leq \mu_B$ が棄却されて対立仮説 $\mu_A > \mu_B$ がいえる．

[公式 8.4] 無限母集団 A から無作為抽出された標本の大きさ n_A 及び無限母集団 B から無作為抽出された標本の大きさ n_B は充分大きいとする．A から抽出された標本の標本平均を表す確率変数 $\overline{X}_A$ と、B から抽出された標本の標本平均を表す確率変数 $\overline{X}_B$ とは互いに独立であるとする．標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく．実数 α は 0 に近い正の数とする．A の母平均 μ_A 及び B の母平均 μ_B について、仮説 $\mu_A \neq \mu_B$ 或いは $\mu_A > \mu_B$ を検討するとき、A からの標本の不偏分散を u_A とおき、B からの標本の不偏分散を u_B において、検定統計量 Q を $Q = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\frac{u_A}{n_A} + \frac{u_B}{n_B}}}$ と定めると次のようになる．

(1) 有意水準 α の両側 Z 検定で、検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(|Z| \geq |q|) = 2P(Z \geq |q|)$ が α より小さいときに限り、帰無仮説 $\mu_A = \mu_B$ が棄却されて対立仮説 $\mu_A \neq \mu_B$ がいえる．

(2) 有意水準 α の右側 Z 検定で、検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(Z \geq q)$ が α より小さいときに限り、帰無仮説 $\mu_A \leq \mu_B$ が棄却されて対立仮説 $\mu_A > \mu_B$ がいえる．

無限母集団 A から無作為抽出された充分大きい大きさ n_A の標本の平均を表す確率変数 $\overline{X}_A$ と、無限母集団 B から無作為抽出された充分大きい大きさ n_B の標本の平均を表す確率変数 $\overline{X}_B$ とは、互いに独立であるとする．標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく．A の母平均 μ_A 及び B の母平均 μ_B について $\mu_A > \mu_B$ を検討するとき、A から抽出した標本の不偏分散 u_A と、B から抽出した標本の不偏分散 u_B とを用いて、検定統計量 Q を $Q = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\frac{u_A}{n_A} + \frac{u_B}{n_B}}}$ と定めた．帰無仮説 $\mu_A \leq \mu_B$ を仮定して、 Q の実現値 q に対して $P(Q \geq q)$ を考えるが、この確率は計算できない； $P(Q \geq q)$ の最大の値が $P(Z \geq q)$ なのでこれを p 値とした； $P(Q \geq q) = P(Z \geq q)$ となるのは $\mu_A = \mu_B$ のときなので、 p 値を求めるには $\mu_A = \mu_B$ のときを考えればよいことになる．それ故、対立仮説 $\mu_A > \mu_B$ を検討するには帰無仮説として $\mu_A = \mu_B$ を仮定して p 値を求めることが多い．

【例】 ある工場ではある部品に A 社と B 社とから仕入れている．A 社製部品の中から無作為抽出された 100 個の部品において、重量の平均は 9.67kg で重量の不偏分散は 0.25kg^2 であった．B 社製部品の中から無作為抽出された 120 個の部品において、重量の平均は 9.52kg で重量の不偏分散は 0.20kg^2 であった．平均すると A 社製部品は B 社製部品より重いといえるか、 p 値を求めて有意水準 1% で検定する．

A 社製部品の全体を無限母集団 A と考え、その中から無作為抽出された大きさ 100 のある標本の平均が 9.67 であり不偏分散が 0.25 であると考える．B 社製部品の全体を無限母集団 B と考え、その中から無作為抽出された大きさ 120 のある標本の平均が 9.52 であり不偏分散が 0.20 であると考える．どちらの標本も充分大きいので、A の母分散を A から抽出した標本の不偏分散 0.25kg^2 で代替し、B の母分散を B から抽出した標本の不偏分散 0.20kg^2 で代替する．A の母平均を μ_A とおき、B の母平均を μ_B とおき、 $\mu_A > \mu_B$ といえるか有意水準 1% で検定する．

母集団 A から抽出された標本の平均を表す確率変数を $\overline{X}_A$ とおき、母集団 B から抽出された標本の平均を表す確率変数を $\overline{X}_B$ とおく． $\overline{X}_A$ は正規分布 $N\left(\mu_A, \frac{0.25}{100}\right)$ に従い、 $\overline{X}_B$ は正規分布 $N\left(\mu_B, \frac{0.20}{120}\right)$ に従うとする．

$$\begin{aligned} E[\overline{X}_A - \overline{X}_B] &= E[\overline{X}_A] - E[\overline{X}_B] = \mu_A - \mu_B \\ V[\overline{X}_A - \overline{X}_B] &= V[\overline{X}_A] + V[\overline{X}_B] = \frac{0.25}{100} + \frac{0.20}{120} \end{aligned}$$

確率変数 $\overline{X}_A - \overline{X}_B$ は正規分布 $N\left(\mu_A - \mu_B, \frac{0.25}{100} + \frac{0.20}{120}\right)$ に従うので、 $\overline{X}_A - \overline{X}_B$ を標準化した確率変数

$$\frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B - \mu_A + \mu_B}{\sqrt{\frac{0.25}{100} + \frac{0.20}{120}}} \approx 15.4919(\overline{X}_A - \overline{X}_B - \mu_A + \mu_B)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う． $\mu_A > \mu_B$ といえるか考えるので、帰無仮説 $\mu_A \leq \mu_B$ を立てる．標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数

$$Z = 15.4919(\overline{X}_A - \overline{X}_B - \mu_A + \mu_B)$$

に対して、検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q = 15.4919(\overline{X}_A - \overline{X}_B)$$

帰無仮説 $\mu_A \leq \mu_B$ より、 $-\mu_A + \mu_B \geq 0$ なので

$$Z = 15.4919(\overline{X}_A - \overline{X}_B - \mu_A + \mu_B) \geq 15.4919(\overline{X}_A - \overline{X}_B) = Q$$

確率変数 Z は標準正規分布に従うので、 $E[Q] \leq E[Z] = 0$ ．検定統計量 Q の実現値が 0 より大きいほど確率的に不自然なので、右側検定を行う．確率変数 $\overline{X}_A$ の実現値は 9.67 で、確率変数 $\overline{X}_B$ の実現値は 9.52 なので、検定統計量 $Q = 15.4919(\overline{X}_A - \overline{X}_B)$ の実現値は

$$15.4919(9.67 - 9.52) \approx 2.3238$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので、 $Q \geq 2.3238$ ならば $Z \geq 2.3238$ 、よって

$$P(Q \geq 2.3238) \leq P(Z \geq 2.3238)$$

帰無仮説の下で Q の値が 2.3238 以上に不自然な実数になる確率は最大で $P(Z \geq 2.3238)$ である．この p 値 $P(Z \geq 2.3238)$ が有意水準 1% より小さいときに限り、帰無仮説 $\mu_A \leq \mu_B$ は甚だ疑わしいと考えるとこれを棄却する．

$$\begin{aligned} P(Z \geq 2.3238) &= 1 - P(Z \leq 2.3238) = 1 - \Phi(2.3238) \\ &= 1 - \Phi(2.3238) \approx 1 - 0.9899 \\ &= 0.0101 \end{aligned}$$

$P(Z \geq 2.3238) < 0.01$ なので、帰無仮説 $\mu_A \leq \mu_B$ は棄却されない．故に、有意水準 1% の右側 Z 検定で、平均すると A 社製部品は B 社製部品より重いとはいえない．

【終】

【問 8.4】 ある会社の A 工場と B 工場との 2 つの工場で製造しているある製品の重量について推定する．A 工場で作られたこの製品の中から選ばれた 120 個を、A 工場のこの製品全体を無限母集団 A としてそこから無作為抽出された標本と考える．B 工場で作られたこの製品の中から選ばれた 150 個を、B 工場のこの製品全体を無限母集団 B としてそこから無作為抽出された標本と考える．A から抽出された標本の平均（単位は kg）を表す確率変数と A から抽出された標本の平均（単位は kg）を表す確率変数とは互いに独立であるとする．調査の結果、母集団 A から抽出した標本の標本平均は 8.62kg であり不偏分散が 0.19kg^2 であり、母集団 B から抽出した標本の標本平均は 8.75kg であり不偏分散が 0.23kg^2 であった．どちらの標本も充分大きいので、各々の母集団の分散を標本の不偏分散で代替する．母集団 B の母平均が母集団 A の母平均より大きいといえるか、有意水準 1% で検定せよ．用いる確率変数を記し、検定統計量 Q を定め、 p 値を小数点以下 5 桁まで求めること．推論の過程を述べること．