

## 8.2 大標本による母平均の検定

母平均が  $\mu$  であり母標準偏差が  $\sigma$  である無限母集団から無作為抽出された標本の大きさ  $n$  が充分大きいとする。定理5.3により、標本平均を表す確率変数  $\overline{X}$  は近似的に正規分布  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  に従う。標本調査では母分散  $\sigma^2$  の値は通常は分からない。標本の大きさ  $n$  が充分に大きいので、標本の不偏分散が母分散とほぼ一致すると考えて、通常は母分散  $\sigma^2$  を標本の不偏分散  $u$  で代替する。標本調査では数学的根拠において確率が厳密な値か近似値かに拘ることにあまり意味がないので、標本平均を表す確率変数  $\overline{X}$  は正規分布  $N(\mu, \frac{u}{n})$  に従うとして確率を考える。 $\overline{X}$  を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{u}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu)$$

は標準正規分布  $N(0,1)$  に従う。標準正規分布を用いる仮説検定を  $Z$  検定という。

与えられた実数  $m$  に対して、仮説  $\mu \neq m$  及び仮説  $\mu > m$  及び仮説  $\mu < m$  を検討する。標本平均を表す確率変数  $\overline{X}$  を標準化した確率変数  $Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu)$  は標準正規分布  $N(0,1)$  に従う。母平均  $\mu$  は分からないので、 $Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu)$  は実現値を計算できないので検定統計量にできない。そこで、 $\mu$  を与えられた実数  $m$  で置き換えた確率変数

$$Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$$

を検定統計量とする。0に近い正の実数  $\alpha$  を有意水準とする。

仮説  $\mu \neq m$  を検討する。帰無仮説  $\mu = m$  を立てる。

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q.$$

検定統計量  $Q$  は標準正規分布  $N(0,1)$  に従うので、 $Q$  の値が0から離れるほど、つまり、 $Q$  の値の絶対値が大きいくほど、確率的に不自然なので、帰無仮説  $\mu = m$  は疑わしい。

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

そこで  $Q$  の実現値の絶対値がある実数より大きいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では0）の左右両側にあるとき、両側検定という。

帰無仮説  $\mu = m$  の下で、検定統計量  $Q$  の値の絶対値が大きいくほど確率的に不自然なので、 $Q$  の値が実数  $q$  以上に不自然な実数になる確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

$Q$  の値  $q$  についてこの確率が小さいほど  $|q|$  が大きいので確率的に不自然である。

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

検定統計量  $Q$  の実現値  $q$  に対する確率  $P(|Z| \geq |q|)$  を  $p$  値として、この  $p$  値を有意水準  $\alpha$  と比べる。

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

$p$  値  $P(|Z| \geq |q|)$  が有意水準  $\alpha$  より小さいとき、甚だ不自然と考えると、帰無仮説を棄却する。

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

帰無仮説  $\mu = m$  の下で、検定統計量  $Q$  の実現値  $q$  に対して、 $p$  値は

$$P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \geq |q|) = 2P(Z \geq |q|).$$

結局、有意水準  $\alpha$  の両側  $Z$  検定で、検定統計量  $Q$  の実現値  $q$  について  $P(|Z| \geq |q|) = 2P(Z \geq |q|) < \alpha$  のときに限り、帰無仮説  $\mu = m$  が棄却されて対立仮説  $\mu \neq m$  がいえる。

仮説  $\mu > m$  を検討する。帰無仮説  $\mu \leq m$  を立てる。 $-\mu \geq -m$  ,  $\overline{X} - \mu \geq \overline{X} - m$  , よって、

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q.$$

確率変数  $Z$  は標準正規分布  $N(0,1)$  に従うので、

$$E[Q] \leq E[Z] = 0.$$

$Q$  の平均値が0以下なので、 $Q$  の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる。

$Q$  の平均値が0よりどれくらい小さいか不明なので、 $Q$  の値が0よりいくらか小さくても確率的に不自然とはいえない。しかし、 $Q$  の値が0より大きいほど、確率的に不自然なので帰無仮説  $\mu \leq m$  は疑わしい。

検定統計量  $Q$  の確率密度関数のグラフ

帰無仮説  $\mu \leq m$  の下で、検定統計量  $Q$  の値が実数  $q$  以上に不自然な実数になる確率は最大で  $P(Z \geq q)$  である。 $Q$  の値  $q$  についてこの確率が小さいほど  $q$  が大きいので確率的に不自然である。

検定統計量  $Q$  の確率密度関数のグラフ

検定統計量  $Q$  の確率密度関数のグラフ

検定統計量  $Q$  の確率密度関数のグラフ

検定統計量  $Q$  の実現値  $q$  に対する確率  $P(Z \geq q)$  を  $p$  値として、この  $p$  値を有意水準  $\alpha$  と比べる。

検定統計量  $Q$  の確率密度関数のグラフ

$p$  値  $P(Z \geq q)$  が有意水準  $\alpha$  より小さいとき、甚だ不自然と考えると、帰無仮説を棄却する。

検定統計量  $Q$  の確率密度関数のグラフ

結局、有意水準  $\alpha$  の右側  $Z$  検定で、検定統計量  $Q$  の実現値  $q$  について  $P(Z \geq q) < \alpha$  のときに限り、帰無仮説  $\mu \leq m$  が棄却されて対立仮説  $\mu > m$  がいえる。

仮説  $\mu < m$  を検討する。帰無仮説  $\mu \geq m$  を立てる。 $-\mu \leq -m$  ,  $\overline{X} - \mu \leq \overline{X} - m$  , よって、

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q.$$

確率変数  $Z$  は標準正規分布  $N(0,1)$  に従うので、

$$E[Q] \geq E[Z] = 0.$$

$Q$  の平均値が0以上なので、 $Q$  の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる。

$Q$  の平均値が0よりどれくらい大きいかわからないので、 $Q$  の値が0よりいくらか大きくても確率的に不自然とはいえない。しかし、 $Q$  の値が0より小さいほど、確率的に不自然なので帰無仮説  $\mu \geq m$  は疑わしい。

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

帰無仮説  $\mu \geq m$  の下で、検定統計量  $Q$  の値が0より小さいほど、確率的に不自然である。そこで  $Q$  の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では0）の左側だけにあるとき、左側検定という。

帰無仮説  $\mu \geq m$  の下で、検定統計量  $Q$  の値が小さいほど確率的に不自然なので、 $Q$  の値が実数  $q$  以上に不自然な実数になる確率は  $P(Q \leq q)$  である。帰無仮説より  $Z \leq Q$  なので、

$$Q \leq q \text{ ならば } Z \leq q,$$

よって

$$P(Q \leq q) \leq P(Z \leq q).$$

帰無仮説の下で検定統計量  $Q$  の値が  $q$  以上に不自然な実数になる確率は最大で  $P(Z \leq q)$  である。

帰無仮説  $\mu \geq m$  の下で、検定統計量  $Q$  の値が実数  $q$  以上に不自然な実数になる確率は最大で  $P(Z \leq q)$  である。 $Q$  の値  $q$  についてこの確率が小さいほど  $q$  が小さいので確率的に不自然である。

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

検定統計量  $Q$  の実現値  $q$  に対する確率  $P(Z \leq q)$  を  $p$  値として、この  $p$  値を有意水準  $\alpha$  と比べる；

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

$p$  値  $P(Z \leq q)$  が有意水準  $\alpha$  より小さいとき、甚だ不自然と考えると、帰無仮説を棄却する。

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

結局、有意水準  $\alpha$  の左側  $Z$  検定で、検定統計量  $Q$  の実現値  $q$  について  $P(Z \leq q) < \alpha$  のときに限り、帰無仮説  $\mu \geq m$  が棄却されて対立仮説  $\mu < m$  がいえる。

右側検定と左側検定とを併せて片側検定という。

**[公式8.2]** 無限母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ  $n$  の標本の標本平均を表す確率変数を  $\overline{X}$  とおく。標準正規分布  $N(0,1)$  に従う確率変数を  $Z$  とおく。実数  $\alpha$  は0に近い正の数とする。未知の母平均  $\mu$  及び与えられた実数  $m$  に対して、仮説  $\mu \neq m$  或いは  $\mu > m$  或いは  $\mu < m$  を検討するとき、標本の不偏分散を  $u$  として検定統計量  $Q$  を  $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$  と定めると次のようになる。

(1) 有意水準  $\alpha$  の両側  $Z$  検定で、検定統計量  $Q$  の実現値  $q$  に対して  $p$  値  $P(|Z| \geq |q|) = 2P(Z \geq |q|)$  が  $\alpha$  より小さいときに限り、帰無仮説  $\mu = m$  が棄却されて対立仮説  $\mu \neq m$  がいえる。

(2) 有意水準  $\alpha$  の右側  $Z$  検定で、検定統計量  $Q$  の実現値  $q$  に対して  $p$  値  $P(Z \geq q)$  が  $\alpha$  より小さいときに限り、帰無仮説  $\mu \leq m$  が棄却されて対立仮説  $\mu > m$  がいえる。

(3) 有意水準  $\alpha$  の左側  $Z$  検定で、検定統計量  $Q$  の実現値  $q$  に対して  $p$  値  $P(Z \leq q)$  が  $\alpha$  より小さいときに限り、帰無仮説  $\mu \geq m$  が棄却されて対立仮説  $\mu < m$  がいえる。

無限母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ  $n$  の標本の標本平均を表す確率変数を  $\overline{X}$  とおく。標準正規分布に従う確率変数を  $Z$  とおく。未知の母平均  $\mu$  及び与えられた実数  $m$  について仮説  $\mu > m$  を検討するとき、標本の不偏分散を  $u$  として検定統計量  $Q$  を  $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$  と定める。帰無仮説  $\mu \leq m$  を仮定して、 $Q$  の実現値  $q$  に対して  $P(Q \geq q)$  を考えるが、この確率は計算できない； $P(Q \geq q)$  の最大の値が  $P(Z \geq q)$  なのでこれを  $p$  値とした； $P(Q \geq q) = P(Z \geq q)$  となるのは  $\mu = m$  のときなので、 $p$  値を求めるには  $\mu = m$  のときを考えればよいことになる。それ故、対立仮説  $\mu > m$  を検討するには帰無仮説として  $\mu = m$  を仮定して  $p$  値を求めることが多い。同様の理由で、対立仮説  $\mu < m$  を検討するには帰無仮説として  $\mu = m$  を仮定して  $p$  値を求めることが多い。

**[例]** 大きさ約60万の母集団から無作為抽出された大きさ150のある標本において、標本の平均は40.35であり、標本の不偏分散は4.7であった。母平均が40でないといえるか、 $p$  値を求めて有意水準5%で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を  $\mu$  とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散4.7で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数  $\overline{X}$  は正規分布  $N(\mu, \frac{4.7}{150})$  に従うとする。 $\overline{X}$  を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{4.7}{150}}} = \sqrt{\frac{150}{4.7}}(\overline{X} - \mu)$$

は標準正規分布  $N(0,1)$  に従う。 $\mu \neq 40$  といえるか考えるので、帰無仮説  $\mu = 40$  を立てる。検定統計量  $Q$  を次のように定める：

$$Q = \sqrt{\frac{150}{4.7}}(\overline{X} - 40).$$

帰無仮説  $\mu = 40$  より、

$$Z = \sqrt{\frac{150}{4.7}}(\overline{X} - \mu) = \sqrt{\frac{150}{4.7}}(\overline{X} - 40) = Q.$$

$Z$  は標準正規分布に従うので  $E[Q] = E[Z] = 0$ 。 $Q$  の値の絶対値が大きいくほど確率的に不自然である。よって両側検定を行う。確率変数  $\overline{X}$  の実現値が40.35なので、 $Q = \sqrt{\frac{150}{4.7}}(\overline{X} - 40)$  の実現値は

$$\sqrt{\frac{150}{4.7}}(40.35 - 40) \approx 1.9773.$$

帰無仮説より  $Q = Z$  なので、 $Q$  の値が1.9773以上に不自然な実数になる確率は

$$P(|Q| \geq 1.9773) = P(|Z| \geq 1.9773).$$

この  $p$  値  $P(|Z| \geq 1.9773)$  が有意水準5%より小さいときに限り、帰無仮説  $\mu = 40$  は甚だ疑わしいと考えてこれを棄却する。標準正規分布の累積分布関数を  $\Phi$  とおく。 $p$  値は

$$P(|Z| \geq 1.9773) = 2P(Z \geq 1.9773) = 2\{1 - P(Z \leq 1.9773)\} = 2\{1 - \Phi(1.9773)\} \approx 2(1 - 0.9760) = 0.0480.$$

$P(|Z| \geq 1.9773) < 0.05$  なので、帰無仮説  $\mu = 40$  は棄却される。故に、有意水準5%の両側  $Z$  検定で、母平均が40でないといえる。 **[図]**

**[問8.2.1]** ある商品には内容の重量が90gと表示されていた。この商品をあちこちから200個を選んでそれらの重量を調べる。選ばれた200個の商品を、この商品の全体を無限母集団としてそこから無作為抽出された標本と考える。調査の結果、標本の重量の平均が89.76gで不偏分散が3.00g<sup>2</sup>であった。この商品の内容の重量の平均は90gといえるか、有意水準5%で検定せよ。用いる確率変数を記し、検定統計量  $Q$  を定め、 $p$  値を小数点以下5桁まで求めること。推論の過程を述べること。

**[例]** 大きさ約50万の母集団から無作為抽出された大きさ200のある標本において、標本の平均は70.21であり、標本の不偏分散は3.2であった。母平均が70より大きいといえるか、 $p$  値を求めて有意水準5%で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を  $\mu$  とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散3.2で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数  $\overline{X}$  は正規分布  $N(\mu, \frac{3.2}{200})$  に従うとする。 $\overline{X}$  を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.2}{200}}} = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\overline{X} - \mu)$$

は標準正規分布  $N(0,1)$  に従う。 $\mu > 70$  といえるか考えるので、帰無仮説  $\mu \leq 70$  を立てる。検定統計量  $Q$  を次のように定める：

$$Q = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\overline{X} - 70).$$

帰無仮説  $\mu \leq 70$  より、

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\overline{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\overline{X} - 70) = Q.$$

$Z$  は標準正規分布に従うので  $E[Q] \leq E[Z] = 0$ 。検定統計量  $Q$  の値が0より大きいほど確率的に不自然である。よって右側検定を行う。確率変数  $\overline{X}$  の実現値が70.21なので、検定統計量  $Q = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\overline{X} - 70)$  の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{3.2}}(70.21 - 70) = \sqrt{\frac{200}{3.2}} \cdot 0.21 \approx 1.6602.$$

帰無仮説より  $Z \geq Q$  なので、 $Q \geq 1.6602$  ならば  $Z \geq 1.6602$ 、よって

$$P(Q \geq 1.6602) \leq P(Z \geq 1.6602).$$

帰無仮説の下で  $Q$  の値が1.6602以上に不自然な実数になる確率は最大で  $P(Z \geq 1.6602)$  である。この  $p$  値  $P(Z \geq 1.6602)$  が有意水準5%より小さいときに限り、帰無仮説  $\mu \leq 70$  は甚だ疑わしいと考えてこれを棄却する。標準正規分布の累積分布関数を  $\Phi$  とおく。 $p$  値は

$$P(Z \geq 1.6602) = 1 - P(Z \leq 1.6602) = 1 - \Phi(1.6602) \approx 1 - 0.9516 = 0.0484.$$

$P(Z \geq 1.6602) < 0.05$  なので、帰無仮説  $\mu \leq 70$  は棄却される。故に、有意水準5%の右側  $Z$  検定で、母平均が70より大きいといえる。 **[図]**

**[問8.2.2]** ある家具メーカーで作られたある棚の製品の中から100個を選んでそれらの耐荷重を調べる。選ばれた100個の製品を、この製品の棚全体を無限母集団としてそこから無作為抽出された標本と考える。調査の結果、標本の耐荷重の平均が70.32kgで不偏分散が1.89kg<sup>2</sup>であった。この製品の耐荷重は平均で70kgより重いと見えるか、有意水準1%で検定せよ。用いる確率変数を記し、検定統計量  $Q$  を定め、 $p$  値を小数点以下5桁まで求めること。推論の過程を述べること。

**[例]** 無限母集団から無作為抽出された大きさ300のある標本において、標本の平均は79.75であり、標本の不偏分散は3.5であった。母平均が80より小さいといえるか、 $p$  値を求めて有意水準1%で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を  $\mu$  とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散3.5で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数  $\overline{X}$  は正規分布  $N(\mu, \frac{3.5}{300})$  に従うとする。 $\overline{X}$  を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.5}{300}}} = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\overline{X} - \mu)$$

は標準正規分布  $N(0,1)$  に従う。 $\mu < 80$  といえるか考えるので、帰無仮説  $\mu \geq 80$  を立てる。検定統計量  $Q$  を次のように定める：

$$Q = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\overline{X} - 80).$$

帰無仮説  $\mu \geq 80$  より、

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\overline{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\overline{X} - 80) = Q.$$

$Z$  は標準正規分布に従うので  $E[Q] \geq E[Z] = 0$ 。検定統計量  $Q$  の値が0より小さいほど確率的に不自然である。よって左側検定を行う。確率変数  $\overline{X}$  の実現値が79.75なので、検定統計量  $Q = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\overline{X} - 80)$  の実現値は

$$\sqrt{\frac{300}{3.5}}(79.75 - 80) = \sqrt{\frac{300}{3.5}} \cdot (-0.25) \approx -2.3146.$$

帰無仮説より  $Z \leq Q$  なので、 $Q \leq -2.3146$  ならば  $Z \leq -2.3146$ 、よって

$$P(Q \leq -2.3146) \leq P(Z \leq -2.3146).$$

帰無仮説の下で  $Q$  の値が-2.3146以上に不自然な実数になる確率は最大  $P(Z \leq -2.3146)$  である。この  $p$  値  $P(Z \leq -2.3146)$  が有意水準1%より小さいときに限り、帰無仮説  $\mu \geq 80$  は甚だ疑わしいと考えてこれを棄却する。標準正規分布の累積分布関数を  $\Phi$  とおく。 $p$  値は

$$P(Z \leq -2.3146) = \Phi(-2.3146) = 1 - \Phi(2.3146) \approx 1 - 0.9897 = 0.0103.$$

$P(Z \leq -2.3146) < 0.01$  なので、帰無仮説  $\mu \geq 80$  は棄却されない。故に、有意水準1%の左側  $Z$  検定で、母平均が80より小さいといえない。 **[図]**

**[問8.2.3]** ある蜜柑農園で収穫前の蜜柑から無作為に120個を選んで酸度を調べる。この120個の蜜柑を、この農園でこのとき栽培された蜜柑の全体を無限母集団としてそこから無作為抽出された標本と考える。調査の結果、標本の酸度の平均が0.753で不偏分散が0.049であった。このときの農園の蜜柑の酸度は平均で0.8より小さいといえるか、有意水準1%で検定せよ。用いる確率変数を記し、検定統計量  $Q$  を定め、 $p$  値を小数点以下5桁まで求めること。推論の過程を述べること。

母平均  $\mu$  に関する  $Z$  検定では、 $\mu$  が与えられた定数  $m$  より僅かにでも大きければ、標本を大きくしていくと  $p$  値は小さくなっていくので帰無仮説  $\mu \leq m$  が棄却される。