

§ 8.1 仮説検定

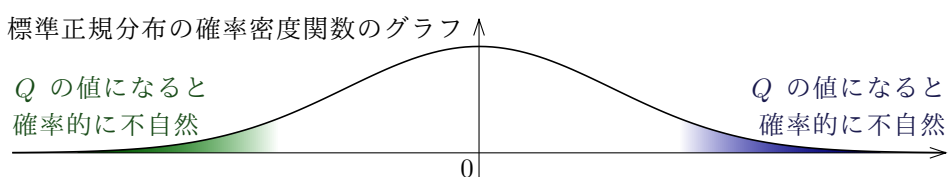
【例】 表側と裏側とがある円盤を回して倒して表側が上を向くか裏側が上を向くかを調べる試行において、裏側が上を向く確率が $\frac{1}{2}$ なのかどうかを考える。例えば、この試行を独立に 8 回繰り返して、8 回とも裏側が上を向いたとする。仮に裏側が上を向く確率が $\frac{1}{2}$ であるとしてみると、8 回とも裏側が上を向くということは、あり得ないことではないがその確率はごく小さい；つまり確率的にひどく不自然である。なので裏側が上を向く確率が $\frac{1}{2}$ であるとは考えにくい。そこでこのようなときは裏側が上を向く確率は $\frac{1}{2}$ でない、裏側が上を向く確率は表側が上を向く確率より大きい、と一応判断する — というのがこれから述べる仮説検定の基本的な考え方である。つまり、仮説検定では次のように考える：ある仮定の下で確率的にひどく不自然なことが起きたとき、一応その仮定を否定する。 終

例で説明する。実数 m と正の実数 s とが与えられているとする。統計量 X は正規分布に従うとする。 X の平均値と分散とは分からない。この統計量 X について次の仮説 H を立てる：

$$H : E[X] = m \text{ かつ } V[X] = s^2 .$$

この仮説 H が本当かどうかは分からない。そこで仮説 H が妥当かどうかどうかを判断する基準を考える。そして、仮説 H を仮定したとき確率的に甚だ不自然なことが起きるならば、仮説 H を一応否定する。

仮説 H を仮定する。確率変数 Q は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので、 Q の値は 0 に近い実数になり易い。 Q の値が 0 から離れるほど、つまり、 Q の値の絶対値が大きいほど、確率的に不自然なので、仮説 H は疑わしい。

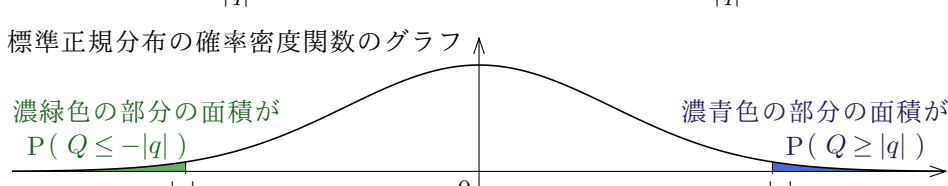
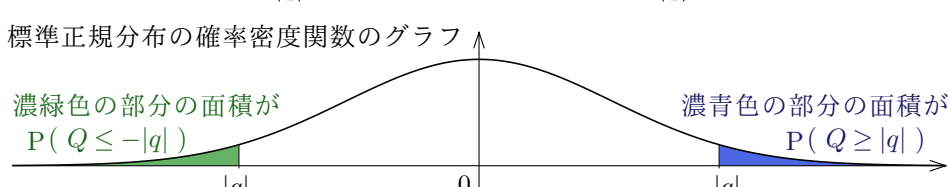
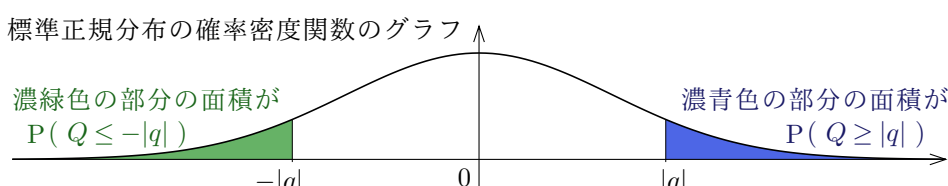


そこで、 Q の実現値の絶対値がある実数より大きいとき、確率的に甚だ不自然であるとして、仮説 H を否定する。この基準をどう定めるか考える。

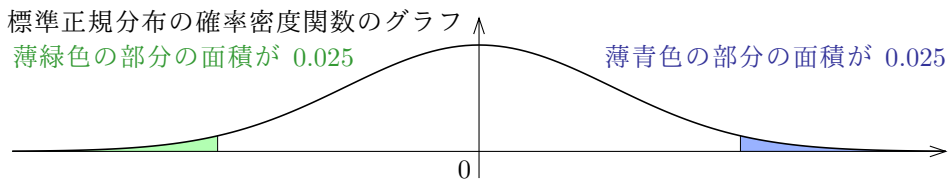
仮説 H の下で、確率変数 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な実数になる確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(Q \geq |q|) + P(Q \leq -|q|) .$$

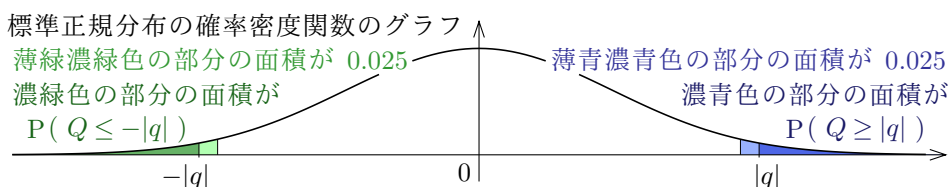
Q の値 q に対して確率 $P(|Q| \geq |q|)$ が小さいほど q の絶対値 $|q|$ が大きいので確率的に不自然である。



しばしば、確率 $5\% = 0.05$ は極めて小さいと考えて、 Q の実現値 q に対して、確率 $P(|Q| \geq |q|)$ を 5% と比べる。

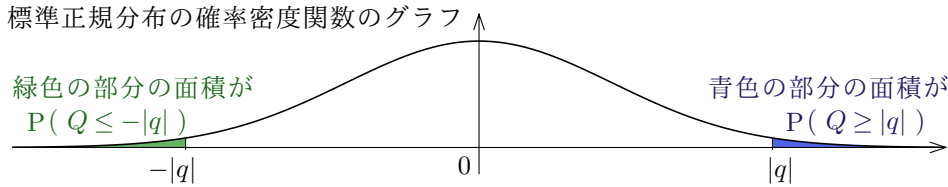


確率 $P(|Q| \geq |q|)$ が 5% より小さいぐらい $|q|$ が大きいとき、仮説 H は大変疑わしいと考えて H を否定する。



この例で幾つか用語を説明する。

与えられた実数 m と正の実数 s とに対して、正規分布に従う統計量 X について仮説 “ $E[X] = m$ かつ $V[X] = s^2$ ” でないかどうか検討する。そのために仮説 “ $E[X] = m$ かつ $V[X] = s^2$ ” を仮定する。このような仮説を帰無仮説という。この帰無仮説により、 X を標準化した確率変数 $Q = \frac{X - m}{s}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。この確率変数 Q の実現値によって、帰無仮説を否定するかしないか判断する。このような確率変数 Q が標本調査の統計量であるとき、 Q を検定統計量という。この例では、 Q の実現値 q に対する確率 $P(|Q| \geq |q|)$ が相当小さいときに帰無仮説を否定した。確率変数 Q が検定統計量であるとき、確率 $P(|Q| \geq |q|)$ を p 値あるいは有意確率という。以下の確率密度関数のグラフでは、濃青色の部分と濃緑色の部分とを併せた部分の面積が p 値 $P(|Q| \geq |q|)$ である。



仮説検定において、 p 値は帰無仮説が成り立つかもしれないと考えられる程度を表す値であり、 p 値が 0 に近いほど帰無仮説は不自然であり疑わしい。それ故に p 値が有意水準より 0 に近いときに限り帰無仮説を否定する。帰無仮説を否定することを “帰無仮説を棄却する” という。

この例では、確率 5% は至って小さいと考え、統計量 Q の値 q に対する p 値が 5% より小さいとき、帰無仮説は確率的に大変不自然であると考え、帰無仮説を棄却する。棄却するかどうかの基準になる確率 5% を有意水準という。帰無仮説が棄却したときつまり否定したときに成り立つ仮説を対立仮説という。

一般的に、 p 値が有意水準より小さいとき、帰無仮説は確率的に不自然であるとして、帰無仮説を棄却して、対立仮説を出張する。 p 値が有意水準以上であるときは帰無仮説を棄却しない。帰無仮説を棄却しないことは、帰無仮説を否定するには根拠が不十分であることであり、帰無仮説が正しいと主張するものではない。帰無仮説を棄却できないときは、帰無仮説が正しいとも誤りであるとも主張できない。

一般的に、仮説検定では以下の手順を踏む。

- (1) 帰無仮説を立てる。
- (2) 検定統計量を定める。
- (4) 検定統計量の実現値に対して p 値を求める。
- (5) p 値が有意水準未満のときは帰無仮説を棄却して対立仮説を主張する； p 値が有意水準以上のときは帰無仮説を棄却しない。