

§ 7.4 大標本による母比率の区間推定

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．実数 α について $0 < \alpha < 1$ とする．母平比率が ρ ($0 < \rho < 1$) である無限 2 項母集団から無作為抽出した標本の大きさ n が充分大きいとする．定理 5.4.2 により標本比率を表す確率変数 R は近似的に正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従う．標本調査では数学的根拠において確率が厳密な値か近似値かに拘ることにあまり意味がないので， R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従うとして確率を考える．定理 7.2 により，

$$P\left(R - \sigma[R] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \leq E[R] \leq R + \sigma[R] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right) = \alpha .$$

$E[R] = \rho$, $\sigma[R] = \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{n}}$ なので，

$$P\left(R - \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \leq \rho \leq R + \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right) = \alpha .$$

R の実現値を r とおく．母比率 ρ の値は分からないので，母比率の ρ の信頼度 α の信頼区間を

$$\left[r - \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right), r + \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right]$$

とするわけにいかない．しかし，標本の大きさ n が十分大きいので，標本比率が母比率とほぼ一致すると考えてよい．それで，母比率 ρ を標本比率 r で代替して，母比率 ρ の信頼度 α の信頼区間を

$$\left[r - \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right), r + \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right]$$

とする．

[公式 7.4] 標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．無限 2 項母集団から無作為抽出した標本の大きさ n が充分大きいとする．標本比率が r であるとき，母比率の信頼度 α の信頼区間は

$$\left[r - \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right), r + \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right]$$

で与えられる．

よく現われる信頼度 α に対する $\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$ の値は次のようになる．信頼度が $\alpha = 99\% = 0.99$ のとき

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{1.99}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.995) \doteq 2.576 .$$

信頼度が $\alpha = 95\% = 0.95$ のとき

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{1.95}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) \doteq 1.960 .$$

[例] 大きさが約 73 万の 2 項母集団から大きさ 1000 の標本を無作為に非復元抽出する．標本比率が 0.6 であるとする．母比率の信頼度 99% の信頼区間を求める．

母集団の大きさ約 73 万に対する標本の大きさ 1000 の比率は非常に小さいので，母集団を無限母集団とみなす．標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．母比率の信頼度 99% の信頼区間は，

$$\begin{aligned} & \left[0.6 - \sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{1000}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+0.99}{2}\right), 0.6 + \sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{1000}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+0.99}{2}\right)\right] \\ &= \left[0.6 - \sqrt{\frac{6}{25000}} \Phi^{-1}(0.995), 0.6 + \sqrt{\frac{6}{25000}} \Phi^{-1}(0.995)\right] \\ &\doteq \left[0.6 - \frac{\sqrt{15}}{250} \cdot 2.576, 0.6 + \frac{\sqrt{15}}{250} \cdot 2.576\right] \\ &\doteq [0.560, 0.640] . \end{aligned}$$

終

[問 7.4] 大きさが約 38 万の 2 項母集団から大きさ 400 の標本を無作為に非復元抽出する．標本比率が 0.8 であるとする．母比率の信頼度 95% の信頼区間を求めよ．