

## § 7.3 大標本による母平均の区間推定

標準正規分布  $N(0,1)$  の累積分布関数を  $\Phi(x)$  とおく．実数  $\alpha$  について  $0 < \alpha < 1$  とする．母平均が  $\mu$  であり母標準偏差が  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) である無限母集団から無作為抽出した標本の大きさ  $n$  が充分大きいとする．定理 5.3 により標本平均を表す確率変数  $\overline{X}$  は近似的に正規分布  $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  に従う．標本調査では数学的根拠において確率が厳密な値か近似値かに拘ることにあまり意味がないので， $\overline{X}$  は正規分布  $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  に従うとして確率を考える．定理 7.2 により，

$$P\left(\overline{X} - \sigma[\overline{X}] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \leq E[\overline{X}] \leq \overline{X} + \sigma[\overline{X}] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right) = \alpha.$$

$$E[\overline{X}] = \mu, \quad \sigma[\overline{X}] = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \quad \text{なので,}$$

$$P\left(\overline{X} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \leq \mu \leq \overline{X} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right) = \alpha.$$

$\overline{X}$  の実現値を  $\bar{x}$  とおく．母分散  $\sigma^2$  の値が分かっているならば，母平均  $\mu$  の信頼度  $\alpha$  の信頼区間は次のようになる：

$$\left[\bar{x} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right), \bar{x} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right].$$

標本調査では母分散  $\sigma^2$  の値は通常は分からない．しかし，標本の大きさが充分に大きいので，標本の不偏分散が母分散とほぼ一致すると考えてよい．それで，母分散  $\sigma^2$  を標本の不偏分散  $u$  で代替して，母平均  $\mu$  の信頼度  $\alpha$  の信頼区間を

$$\left[\bar{x} - \sqrt{\frac{u}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right), \bar{x} + \sqrt{\frac{u}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right]$$

とする．

**[公式 7.3]** 標準正規分布  $N(0,1)$  の累積分布関数を  $\Phi(x)$  とおく．無限母集団から無作為抽出した標本の大きさ  $n$  が充分大きいとする．実数  $\alpha$  について  $0 < \alpha < 1$  とする．標本平均が  $\bar{x}$  であり，標本の不偏分散が  $u$  であるとき，母平均の信頼度  $\alpha$  の信頼区間は

$$\left[\bar{x} - \sqrt{\frac{u}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right), \bar{x} + \sqrt{\frac{u}{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right]$$

で与えられる．

よく現われる信頼度  $\alpha$  に対する  $\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$  の値は次のようになる．信頼度が  $\alpha = 99\% = 0.99$  のとき

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{1.99}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.995) \doteq 2.576.$$

信頼度が  $\alpha = 95\% = 0.95$  のとき

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{1.95}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) \doteq 1.960.$$

**[例]** 大きさが約 73 万の母集団から大きさ 500 の標本を無作為に非復元抽出する．標本の平均が 570 で不偏分散が 180 であるとする．標本の不偏分散を母分散として代用して，母平均の信頼度 99% の信頼区間を求める．

母集団の大きさ約 73 万に対する標本の大きさ 500 の比率は極めて小さいので，母集団を無限母集団とみなす．また，標本の大きさ 500 は充分大きいので，標本の不偏分散 180 を母分散とみなす．標準正規分布  $N(0,1)$  の累積分布関数を  $\Phi(x)$  とおく．母平均の信頼度 99% の信頼区間は，

$$\begin{aligned} & \left[570 - \sqrt{\frac{180}{500}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+0.99}{2}\right), 570 + \sqrt{\frac{180}{500}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+0.99}{2}\right)\right] \\ &= \left[570 - \sqrt{\frac{9}{25}} \Phi^{-1}(0.995), 570 + \sqrt{\frac{9}{25}} \Phi^{-1}(0.995)\right] \\ &\doteq \left[570 - \frac{3}{5} \cdot 2.576, 570 + \frac{3}{5} \cdot 2.576\right] \\ &\doteq [568.45, 571.55] \end{aligned}$$

**[問 7.3]** 大きさが約 67 万の母集団から大きさ 400 の標本を無作為に非復元抽出する．標本の平均が 380 であり不偏分散が 144 であるとする．標本の不偏分散を母分散として代用して，母平均の信頼度 95% の信頼区間を求めよ．