

§ 7.2 正規分布の平均値の区間推定の基

実数 α について $0 < \alpha < 1$ とする. 確率変数 X は正規分布に従うとする. $\sigma[X] > 0$ とする. X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - E[X]}{\sigma[X]}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく:

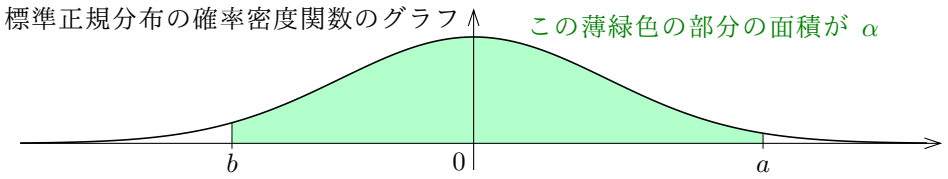
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt .$$

各実数 a について,

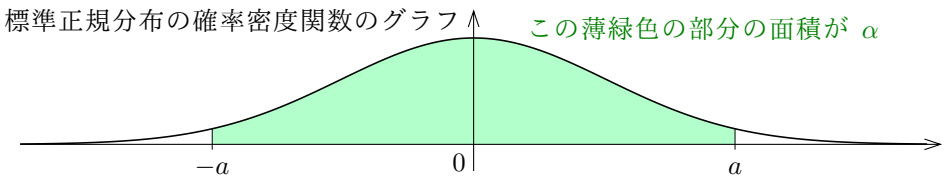
$$P(Z \leq a) = \Phi(a) ,$$

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a) .$$

信頼度 α に対して次のような実数 a, b を考える: $P(b \leq Z \leq a) = \alpha$. 標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数のグラフを考えると下図のようになる.



信頼度 α を満たす範囲で信頼区間をなるべく狭くするために, $P(b \leq Z \leq a) = \alpha$ である実数 a と b との間隔 $a - b$ をなるべく小さくする. 標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数は偶関数なので, $b = -a$ とする.



$P(-a \leq Z \leq a) = \alpha$ である実数 a を求める.

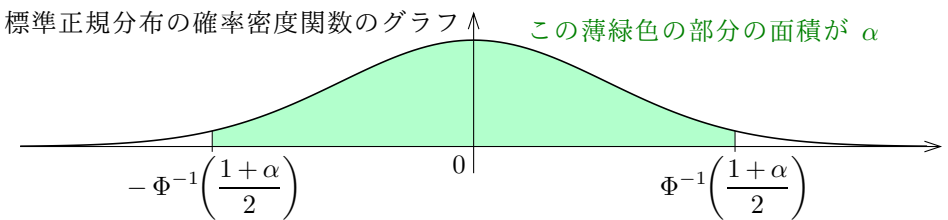
$$\begin{aligned} P(-a \leq Z \leq a) &= P(Z \leq a) - P(Z \leq -a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - \{1 - \Phi(a)\} \\ &= 2\Phi(a) - 1 . \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} P(-a \leq Z \leq a) = \alpha &\iff 2\Phi(a) - 1 = \alpha \iff \Phi(a) = \frac{1+\alpha}{2} \\ &\iff a = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) . \end{aligned}$$

故に

$$P\left(-\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \leq Z \leq \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right) = \alpha .$$



$Z = \frac{X - E[X]}{\sigma[X]}$ なので

$$P\left(-\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \leq \frac{X - E[X]}{\sigma[X]} \leq \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right) = \alpha .$$

$\sigma[X] > 0$ なので,

$$\begin{aligned} &-\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \leq \frac{X - E[X]}{\sigma[X]} \leq \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \\ \iff &-\sigma[X] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \leq X - E[X] \leq \sigma[X] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \\ \iff &\sigma[X] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \geq E[X] - X \geq -\sigma[X] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \\ \iff &-\sigma[X] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \leq E[X] - X \leq \sigma[X] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \\ \iff &X - \sigma[X] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \leq E[X] \leq X + \sigma[X] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) . \end{aligned}$$

よって

$$P\left(X - \sigma[X] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \leq E[X] \leq X + \sigma[X] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right) = \alpha .$$

[定理 7.2] 標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく. 実数 α について $0 < \alpha < 1$ とする. 正規分布に従う確率変数 X について,

$$P\left(X - \sigma[X] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \leq E[X] \leq X + \sigma[X] \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right) = \alpha .$$