

§ 6.2 母平均の点推定

[定理 6.2] 母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本の標本確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の平均

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

は母平均の不偏推定量である。

証明 母平均を μ とおく。

$$E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = \dots = E[X_n] = \mu ,$$

よって定理 4.2.2 により $E[\overline{X}] = \mu$. 故に統計量 $\overline{X}$ は母平均 μ の不偏推定量である。

証明終了

例 母平均が μ であり母標準偏差が σ である母集団から無作為抽出された大きさ 2 の標本の標本確率変数 X_1, X_2 は互いに独立で、共に母集団分布に従うものとする。 $\sigma > 0$ とする。

$$E[X_1] = E[X_2] = \mu , \quad V[X_1] = V[X_2] = \sigma^2 > 0 .$$

統計量 T_1 と T_2 とを次のように定める：

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} , \quad T_2 = \frac{2X_1 + X_2}{3} .$$

上述の定理 6.2 により T_1 は母平均 μ の不偏推定量である。また、定理 4.2.2 により、

$$E[T_2] = E\left[\frac{2X_1 + X_2}{3}\right] = \frac{2E[X_1] + E[X_2]}{3} = \frac{2\mu + \mu}{3} = \mu .$$

従って、統計量 T_2 も母平均 μ の不偏推定量である。このように、 T_1 も T_2 も母平均の不偏推定量なので、不偏性という観点だけでは母平均の推定量としてどちらの方が望ましいともいえない。

統計量 T_1, T_2 の分散を計算する。標本確率変数 X_1 と X_2 とは互いに独立なので、 $T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}$ の分散は

$$\begin{aligned} V[T_1] &= V\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = V\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right] = \frac{1}{4}V[X_1] + \frac{1}{4}V[X_2] = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 , \end{aligned}$$

$T_2 = \frac{2X_1 + X_2}{3}$ の分散は

$$\begin{aligned} V[T_2] &= V\left[\frac{2X_1 + X_2}{3}\right] = V\left[\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2\right] = \frac{4}{9}V[X_1] + \frac{1}{9}V[X_2] = \frac{4}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 \\ &= \frac{5}{9}\sigma^2 . \end{aligned}$$

このように $V[T_1] < V[T_2]$ なので、推定量 T_1 は推定量 T_2 より有効である。つまり、 T_2 の実現値より T_1 の実現値の方が母平均に近い値になり易い。故に母平均の推定量として T_2 より T_1 の方が望ましい。

問 6.2 無限母集団から大きさ 2 の標本を無作為に抽出するときの標本確率変数を X_1, X_2 とおく。母平均を μ と、母標準偏差を σ とおく。 $\sigma > 0$ とする。統計量 T_1 と T_2 とを次のように定める：

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} , \quad T_2 = \frac{2X_1 + 3X_2}{5} .$$

統計量 T_2 は母平均 μ の不偏推定量であることを示せ。また、母平均 μ の推定量として、統計量 T_1 と統計量 T_2 とのどちらが有効であることを調べよ。

標本確率変数の平均は母平均の一致推定量である（証明は省く）。

[定理] 無限母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本の標本確率変数を $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ とおくと、標本平均を表す統計量

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

は母平均の一致推定量である。