

§ 5.4 2 項母集団

母集団に属す各々の事物について、ある性質を持つか持たないか、二つのうちのどちらかであるとする。この母集団の中でこの性質を持つものの割合を**母比率**といい、母比率に興味があるとき母集団を**2 項母集団**という。例えば、選挙権の有権者の全体の中で内閣を支持する人の割合に興味があるとき、有権者の全体が 2 項母集団であり、その中で内閣を支持する人の割合が母比率である。

2 項母集団の母比率を標本調査するとき、標本の中でその性質を持つ事物の占める割合を**標本比率**という。

例 要素が 5 個ある集合の各々の要素について、ある性質 A を持つか持たないかのどちらかであるとする。5 個の要素のうち性質 A を持つ要素は 3 個であるとする。性質 A を持つ要素の比率は $\frac{3}{5}$ である。性質 A を持つ要素の属性値は 1 とし、性質 A を持たない要素の属性値は 0 とする。このとき、属性値の平均は

$$\frac{1+1+1+0+0}{5} = \frac{3}{5}.$$

つまり比率と平均とは同じである。

終

一般的に、2 項母集団に属す各々の事物について、着目する性質を持つときその属性値は 1 とし、持たないとき属性値は 0 とする。このとき、母比率と母平均とは同じである。また、抽出された標本の標本比率と標本平均とは同じである。

2 項母集団の大きさを N とおき母比率を ρ とおく。母集団の要素のうち、属性値が 1 である要素の個数は $N\rho$ であり、属性値が 0 である要素の個数は $N(1-\rho)$ である。属性値の合計は $1 \cdot N\rho + 0 \cdot N(1-\rho) = N\rho$ なので、母平均は $\frac{N\rho}{N} = \rho$ である。母分散は

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\{(1-\rho)^2 \cdot N\rho + (0-\rho)^2 \cdot N(1-\rho)\} &= (1-\rho)^2\rho + (0-\rho)^2(1-\rho) \\ &= (1-\rho)\{(1-\rho)\rho + \rho^2\} \\ &= \rho(1-\rho). \end{aligned}$$

こうして次の定理が示された。

[定理 5.4.1] 母比率が ρ である 2 項母集団の母平均は ρ であり母分散は $\rho(1-\rho)$ である。

5.3 節において中心極限定理から次の定理を導いた。

[定理 5.3] 母平均が μ であり母標準偏差が σ である無限母集団から無作為抽出された標本の標本平均を表す確率変数は、標本の大きさ n が充分大きいとき、近似的に正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

母比率が ρ である無限 2 項母集団の母平均は ρ であり母分散は $\rho(1-\rho)$ である。この母集団から無作為抽出された標本の標本比率すなわち標本平均を表す確率変数は、標本の大きさ n が充分大きいとき、近似的に正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従う。

[定理 5.4.2] 母比率が ρ である無限 2 項母集団から無作為抽出された標本の標本比率を表す確率変数は、標本の大きさ n が充分大きいとき、近似的に正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従う。

標本調査では通常は厳密な値を得られない。それ故、数学的根拠において確率が厳密な値か近似値かに拘ることにあまり意味がない。そこで、しばしば、定理 5.4.2 における“近似的に正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従う”という記述の“近似的に”という断りを省く。

例題 母平比率が 0.3 である無限 2 項母集団から無作為に非復元抽出された大きさ 200 の標本の標本比率を表す確率変数 R について、確率 $P(R \leq 2.5)$ を求める。

標本比率を表す確率変数 R は正規分布

$$N\left(0.3, \frac{0.3 \cdot 0.7}{200}\right) = N\left(0.3, \frac{21}{20000}\right)$$

に従うとする。 R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - 0.3}{\sqrt{\frac{21}{20000}}} = \sqrt{\frac{20000}{21}}(R - 0.3)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく。

$$\begin{aligned} P(R \leq 0.25) &= P\left(\sqrt{\frac{20000}{21}}(R - 0.3) \leq \sqrt{\frac{20000}{21}}(0.25 - 0.3)\right) \\ &\doteq P(Z \leq -1.54) = \Phi(-1.54) = 1 - \Phi(1.54) \doteq 1 - 0.9382 \\ &\doteq 0.0618. \end{aligned}$$

終

問 5.4 母平比率が 0.6 である無限 2 項母集団から無作為に非復元抽出された大きさ 300 の標本の標本比率を表す確率変数 R について、確率 $P(R \geq 0.55)$ を求めよ。