

§ 4.1 2次元の確率変数

例えば、ある工場で生産されるある製品を何個か取り出してその製品の重量を測るとする。この工場で生産されるこの製品の重量がどのように分布するか定まっている、かつ、製品の取り出し方が決まっているとする。このときこの工場で生産されるこの製品の1個の重量を表わす変数 X を確率変数と考えることができる。この製品を順番に2個取り出してそれらの製品の重量を測るとする。1番めの製品の重量を表す変数を X とおき、2番めの製品の重量を表す変数を Y とおくとき、2個の確率変数 X と Y との順序対 (X,Y) を2次元の確率変数という。

このように、2次元の確率変数とは2個の確率変数の順序対のことである。但し、数学的には以下のようにやや条件が付く。

[定義] 2個の確率変数 X と Y との対 (X,Y) が2次元の確率変数であるとは次の条件を満たすことである：任意の実数 a と b に対して、“ $X \leq a$ かつ $Y \leq b$ ”となる確率が定まる。

2個の確率変数 X と Y との対 (X,Y) が2次元の確率変数であるとき、実数 a,b に対して、例えば、

“ $X \leq a$ かつ $Y \leq b$ ”となる確率を $P(X \leq a, Y \leq b)$ と、

“ $X \geq a$ かつ $Y \geq b$ ”となる確率を $P(X \geq a, Y \geq b)$ と、

いうように書き表す。

2個の確率変数 X と Y とが**互いに独立** (mutually independent) であるとは、直感的にいうと、 X の値（の範囲）が分かっても Y の値の確率に影響しないし、 Y の値（の範囲）が分かっても X の値の確率に影響しない、ということである。数学的には以下のように定義される。

[定義] 2個の確率変数 X と Y とが互いに独立であるとは次の条件を満たすことである： X と Y との対 (X,Y) が2次元の確率変数であり、任意の実数 a と b について

$$P(X \leq a, Y \leq b) = P(X \leq a) P(Y \leq b) .$$

以下の定理が成り立つ（証明は省く）。

[定理 4.1.1] 2個の確率変数 X と Y との順序対 (X,Y) が2次元の確率変数であるとする。定数 a,b に対して変数 Z を $Z = aX + bY$ とおく。 Z は（1次元の）確率変数であり、

$$E[Z] = E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] .$$

更に、確率変数 X と Y とが互いに独立であるならば、

$$V[Z] = V[aX + bY] = a^2 V[X] + b^2 V[Y] .$$

[例] 離散型確率変数 X 及び Y がとり得る値は $1, 2, 3$ であり、

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{3} , \\ P(Y = 1) &= P(Y = 2) = P(Y = 3) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

とする。加えて X と Y とは独立であるとする。確率変数 $Z = X + Y$ がとり得る値は $2, 3, 4, 5, 6$ だけである。

$$\begin{aligned} P(Z = 2) &= P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1) P(Y = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z = 3) &= P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) \\ &= P(X = 1) P(Y = 2) + P(X = 2) P(Y = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{9} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z = 4) &= P(X = 1, Y = 3) + P(X = 2, Y = 2) + P(X = 3, Y = 1) \\ &= P(X = 1) P(Y = 3) + P(X = 2) P(Y = 2) + P(X = 3) P(Y = 1) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z = 5) &= P(X = 2, Y = 3) + P(X = 3, Y = 2) \\ &= P(X = 2) P(Y = 3) + P(X = 3) P(Y = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{9} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z = 6) &= P(X = 3, Y = 3) = P(X = 3) P(Y = 3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9} . \end{aligned}$$

このように、 $Z = X + Y$ の確率分布は元の確率変数 X や Y の確率分布とは異なる。

2個の確率変数 X と Y との順序対 (X,Y) が2次元の確率変数であるとき、定数 a,b に対して、先の定理で述べたように、 $aX + bY$ は（1次元の）確率変数である。但し、確率変数 X と Y とが同じ種類の分布に従うときでも、確率変数 $aX + bY$ がまたその種類の分布に従うとは限らない。例えば、確率変数 X と Y とが一様分布に従っても、確率変数 $aX + bY$ は大抵は一様分布に従わない。しかし、正規分布については次の定理が成り立つ（証明は省く）。

[定理 4.1.2] 定数 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ は実数で $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_2 \geq 0$ とする。正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ に従う確率変数 X と正規分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従う確率変数 Y とが互いに独立であるならば、任意の定数 a,b に対して、確率変数 $aX + bY$ は正規分布 $N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ に従う。

[例題] 正規分布 $N(50, 70)$ に従う確率変数 X と正規分布 $N(60, 90)$ に従う確率変数 Y とは互いに独立であるとする。確率 $P(3X \leq 2Y + 20)$ を求める。

$$3X \leq 2Y + 20 \iff 3X - 2Y \leq 20 .$$

確率変数 $3X - 2Y$ について、

$$E[3X - 2Y] = 3E[X] - 2E[Y] = 3 \cdot 50 - 2 \cdot 60 = 30 .$$

X と Y とは独立なので、

$$V[3X - 2Y] = V[3X + (-2)Y] = 3^2 V[X] + (-2)^2 V[Y] = 9 \cdot 70 + 4 \cdot 90 = 990 .$$

よって、 $3X - 2Y$ は正規分布 $N(30, 990)$ に従うので、 $3X - 2Y$ を標準化した確率変数 $Z = \frac{3X - 2Y - 30}{\sqrt{990}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$\begin{aligned} 3X \leq 2Y + 20 &\iff 3X - 2Y \leq 20 \iff \frac{3X - 2Y - 30}{\sqrt{990}} \leq \frac{20 - 30}{\sqrt{990}} \\ &\iff Z \leq -\frac{10}{\sqrt{990}} ; \end{aligned}$$

標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく。

$$\begin{aligned} P(3X \leq 2Y + 20) &= P\left(Z \leq -\frac{10}{\sqrt{990}}\right) = \Phi\left(-\frac{10}{\sqrt{990}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{990}}\right) \doteq 1 - \Phi(0.318) \doteq 1 - 0.625 \\ &= 0.375 . \end{aligned}$$

終

[問 4.1] 正規分布 $N(40, 64)$ に従う確率変数 X と正規分布 $N(70, 100)$ に従う確率変数 Y とは互いに独立であるとする。確率 $P(5X \geq 3Y + 20)$ を求めよ。