

§ 3.5 正規分布に関する確率の計算

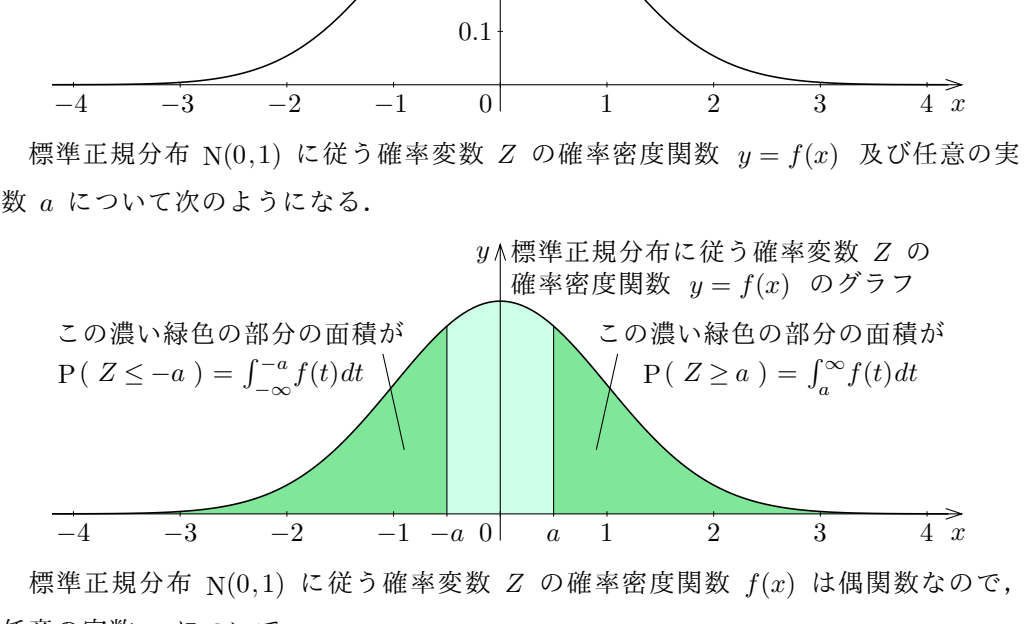
前節で述べたように、平均値が 0 であり分散が 1 である正規分布 $N(0,1)$ を標準正規分布という．その確率密度関数 $f(x)$ は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ ．任意の実数 x について

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(-x)^2}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = f(x) \text{ ．}$$

よって標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関 $f(x)$ は偶関数である．

[定理 3.5.1] 標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数は偶関数である．

このことより、 xy 座標平面において、標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ のグラフは y 軸に関して対称である．標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ のグラフは次のようになる．



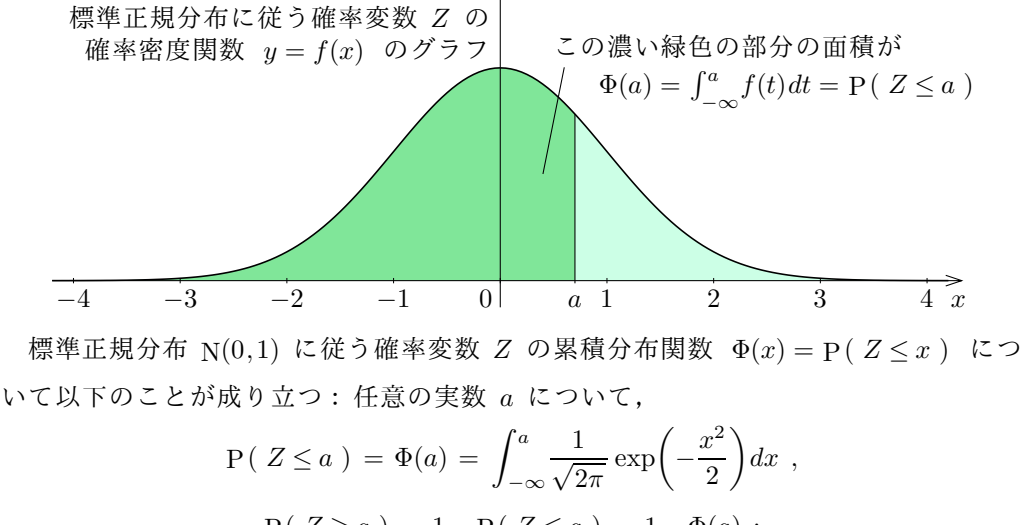
標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の確率密度関数 $y = f(x)$ 及び任意の実数 a について次のようになる．

$$\begin{aligned} P(Z \leq -a) &= \int_{-\infty}^{-a} f(t) dt = \int_a^{\infty} f(t) dt = P(Z \geq a) \text{ ,} \\ P(Z \geq -a) &= P(Z \leq -(-a)) = P(Z \leq a) \text{ .} \end{aligned}$$

正規分布に従う確率変数に関する確率の計算を考える．標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．標準正規分布の確率密度関数は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ なので、

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \text{ .}$$

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の確率密度関数 $y = f(x)$ のグラフにおいて累積分布関数 $\Phi(x)$ の図形的意味は次のようになる．



標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数 $\Phi(x) = P(Z \leq x)$ について以下のことが成り立つ：任意の実数 a について、

$$\begin{aligned} P(Z \leq a) &= \Phi(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \text{ ,} \\ P(Z \geq a) &= 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a) \text{ ;} \end{aligned}$$

更にこれらのことより、

$$\Phi(-a) = P(Z \leq -a) = P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a) \text{ .}$$

任意の実数 a, b について、 $a \leq b$ のとき、

$$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a) = \Phi(b) - \Phi(a) \text{ .}$$

[定理 3.5.2] 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく：

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \text{ .} \\ \text{各実数 } a \text{ について、} \quad \Phi(-a) &= 1 - \Phi(a) \text{ であり、} \\ P(Z \leq a) &= \Phi(a) \text{ ,} \\ P(Z \geq a) &= 1 - \Phi(a) \text{ .} \end{aligned}$$

各実数 a, b について、 $a \leq b$ のとき

$$P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) \text{ .}$$

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ の値は初等的な関数の式で表せないので、 $\Phi(x)$ の値は計算機を用いた数値計算によって近似値が計算されて数値表にまとめられている．標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数の近似値の表を正規分布表という．正規分布表には、通常、0 以上の実数に対する標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数の近似値が記載されていたりする²⁾．

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ について、以下の正規分布表で例えば 0.68 に対する値 $\Phi(0.68)$ の近似値を調べると 0.7517 である．

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389

上述の公式と正規分布表とを用いて標準正規分布に関する確率を計算する．

[例] 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について、確率 $P(Z \leq 1.23)$ 、 $P(Z \geq 0.97)$ 、 $P(Z \leq -0.25)$ 、 $P(Z \geq -2.17)$ 、 $P(-0.73 \leq Z \leq 1.46)$ を求める．標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．

$$\begin{aligned} P(Z \leq 1.23) &= \Phi(1.23) \approx 0.8907 \text{ .} \\ P(Z \geq 0.97) &= 1 - P(Z \leq 0.97) = 1 - \Phi(0.97) \approx 1 - 0.8340 = 0.1660 \text{ .} \\ P(Z \leq -0.25) &= \Phi(-0.25) = 1 - \Phi(0.25) \approx 1 - 0.5987 = 0.4013 \text{ .} \\ P(Z \geq -2.17) &= 1 - P(Z \leq -2.17) = 1 - \Phi(-2.17) = 1 - \{1 - \Phi(2.17)\} = \Phi(2.17) \\ &\approx 0.9850 \text{ .} \\ P(-0.73 \leq Z \leq 1.46) &= \Phi(1.46) - \Phi(-0.73) = \Phi(1.46) - \{1 - \Phi(0.73)\} \\ &= \Phi(1.46) + \Phi(0.73) - 1 \approx 0.9279 + 0.7673 - 1 \\ &= 0.6952 \text{ .} \end{aligned}$$

[問 3.5.1] 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について、確率 $P(Z \leq 1.74)$ 、 $P(Z \geq 0.79)$ 、 $P(Z \leq -2.13)$ 、 $P(Z \geq -1.36)$ 、 $P(-0.87 \leq Z \leq 1.28)$ を求めよ．

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ の逆関数 $\Phi^{-1}(x)$ の近似値を求めるためには正規分布表を逆に引く．例えば、以下の正規分布表で $\Phi^{-1}(0.791)$ の近似値を調べると 0.81 である．

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389

[例] 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について、 $P(Z \leq a) = 0.975$ である実数 a を求める．標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく． $P(Z \leq a) = 0.975$ より $\Phi(a) = 0.975$ 、従って $a = \Phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$ ．

[例] 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について、 $P(Z \leq b) = 0.305$ である実数 b を求める．標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく． $P(Z \leq b) = \Phi(b)$ なので、 $P(Z \leq b) = 0.305$ より $\Phi(b) = P(Z \leq b) = 0.305$ 、 $\Phi(-b) = 1 - \Phi(b) = 1 - 0.305 = 0.695$ 、 $-b \approx \Phi^{-1}(0.695) \approx 0.51$ 、 $b \approx -0.51$ ．

[例] 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について、 $P(Z \geq c) = 0.67$ である実数 c を求める．標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．

$$\begin{aligned} P(Z \geq c) &= 1 - P(Z \leq c) = 1 - \Phi(c) = \Phi(-c) \text{ .} \\ P(Z \geq c) &= 0.67 \text{ より } \Phi(-c) = 0.67 \text{ , } -c = \Phi^{-1}(0.67) \approx 0.44 \text{ , よって } c \approx -0.44 \text{ .} \end{aligned}$$

[問 3.5.2] 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について、 $P(Z \geq a) = 0.166$ である実数 a 及び $P(Z \leq b) = 0.063$ である実数 b を求めよ．

標準正規分布でない正規分布に関する確率を計算するには、前節の定理 3.4.3 を用いて、標準正規分布に関する確率に変換する．

定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする．正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数を Z とく：

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ .}$$

定理 3.4.3 より、 Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数である．標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく： $\Phi(x) = P(Z \leq x)$ ． $\sigma > 0$ なので、定数 a について、

$$X \leq a \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{a - \mu}{\sigma} \iff Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma} \text{ ,}$$

よって

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \text{ .}$$

$\sigma > 0$ なので、定数 a について、

$$X \geq a \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{a - \mu}{\sigma} \iff Z \geq \frac{a - \mu}{\sigma} \text{ ,}$$

よって

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \text{ .}$$

$\sigma > 0$ なので、 $a \leq b$ である定数 a, b について、

$$a \leq X \leq b \iff \frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma} \iff \frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma} \text{ ,}$$

よって

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \text{ .}$$

このように、正規分布に従う確率変数 X に関する確率は標準正規分布の累積分布関数 Φ を用いて計算できる．

[例] 正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X について、確率 $P(X \geq 73)$ 、 $P(X \geq 62)$ 、 $P(66 \leq X \leq 77)$ を求める．正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数

$$Z = \frac{X - 70}{\sqrt{25}} = \frac{X - 70}{5}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．

$$X \geq 73 \iff \frac{X - 70}{5} \geq \frac{73 - 70}{5} \iff Z \geq 0.6 \text{ ;}$$

$$\begin{aligned} \Phi(0.6) &\approx 0.7243 \text{ なので、} \\ P(X \geq 73) &= P(Z \geq 0.6) = 1 - P(Z \leq 0.6) = 1 - \Phi(0.6) \approx 1 - 0.7257 \\ &= 0.2743 \text{ .} \end{aligned}$$

また、

$$X \geq 62 \iff \frac{X - 70}{5} \geq \frac{62 - 70}{5} \iff Z \geq -1.6 \text{ ;}$$

$$\begin{aligned} \Phi(1.6) &\approx 0.9452 \text{ なので、} \\ P(X \geq 62) &= P(Z \geq -1.6) = 1 - P(Z \leq -1.6) \\ &= 1 - \Phi(-1.6) = 1 - \{1 - \Phi(1.6)\} = \Phi(1.6) \\ &\approx 0.9452 \text{ .} \end{aligned}$$

更に、

$$66 \leq X \leq 77 \iff \frac{66 - 70}{5} \leq \frac{X - 70}{5} \leq \frac{77 - 70}{5} \iff -0.8 \leq Z \leq 1.4 \text{ ;}$$

$$\begin{aligned} \Phi(1.4) &\approx 0.9192 \text{ , } \Phi(0.8) \approx 0.7881 \text{ なので、} \\ P(67 \leq X \leq 77) &= P(-0.8 \leq Z \leq 1.4) = \Phi(1.4) - \Phi(-0.8) = \Phi(1.4) - \{1 - \Phi(0.8)\} \\ &= \Phi(1.4) + \Phi(0.8) - 1 \approx 0.9192 + 0.7881 - 1 \\ &= 0.7073 \text{ .} \end{aligned}$$

[問 3.5.3] 正規分布に従う確率変数 X の平均値は 53 で分散は 16 であるとする．確率 $P(X \geq 58)$ 、 $P(X \geq 50)$ 、 $P(46 \leq X \leq 56)$ を求めよ．

ある量を表す変数が確率変数で確率分布 $\mathcal{P}$ に従うとき、その量は確率分布 $\mathcal{P}$ に従うという．

[例] 全国の 19 歳男子の身長（単位は cm）は正規分布に従うものとする．19 歳男子の身長の平均値は 171cm であり標準偏差は 6cm であるとする．19 歳男子について、背が高い方から 10% 以内に入るための最低の身長を求める．全国の 19 歳男子の中から無作為に選んだ人の身長（単位は cm）を表す変数を X とおく．

$P(X \geq a) = 10\%$ である実数 a を求めればよい．正規分布 $N(167, 6^2)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 171}{6}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．

$$X \geq a \iff \frac{X - 171}{6} \geq \frac{a - 171}{6} \iff Z \geq \frac{a - 171}{6} \text{ ;}$$

よって

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - 171}{6}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 171}{6}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a - 171}{6}\right) \text{ .}$$

$P(X \geq a) = 10\% = 0.1$ なので、

$$1 - \Phi\left(\frac{a - 171}{6}\right) = 0.1 \text{ ,}$$

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{a - 171}{6}\right) &= 1 - 0.1 = 0.9 \text{ ,} \\ \frac{a - 171}{6} &= \Phi^{-1}(0.9) \approx 1.28 \text{ ,} \\ a &\approx 1.28 \times 6 + 171 = 178.68 \text{ .} \end{aligned}$$

従って、背が高い方から 10% 以内に入るための最低の身長は約 178.7cm である．

[問 3.5.4] ある試験の点数は正規分布に従い、平均点が 63 であり標準偏差が 11 であるとする．この試験において上位から 20% 以内に入るための最低点を求めよ（小数点以下は切り上げよ）．

²⁾ 標準正規分布に従う確率変数 Z の累積分布関数 $\Phi(x)$ について、 $P(0 \leq Z \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \Phi(x) - \frac{1}{2}$ の近似値が記載されていたり、 $P(Z \geq x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 1 - \Phi(x)$ の近似値が記載されていたりもする．