

§ 3.4 正規分布

自然数 n を大きくしていくときに 2 項分布 $B\left(n,\frac{1}{2}\right)$ (に基づく分布) がどのようなになるか考える. 2 項分布 $B\left(n,\frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数を X とおく. 定理 3.1 により

$$E[X] = \frac{n}{2}, \quad V[X] = \frac{n}{4}.$$

n が大きくなるに連れて $E[X]$ も $V[X]$ も大きくなる. これでは考えにくいので, 平均値と分散とが一定になるように, 2.4 節で述べた“標準化”を用いる. X を標準化した確率変数 T とおく:

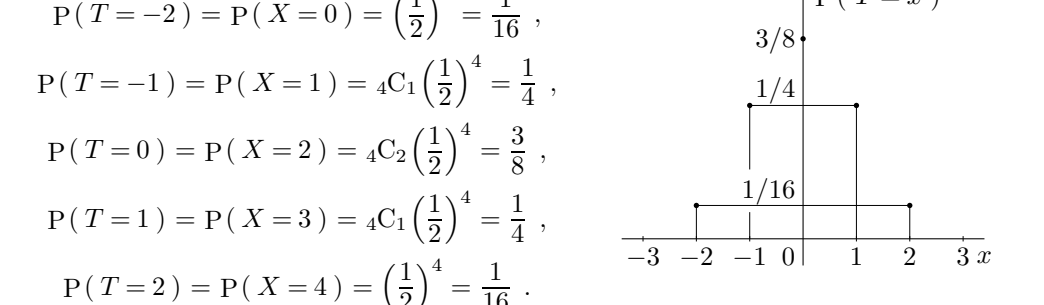
$$T = \frac{X - E[X]}{\sigma[X]} = \frac{X - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = \frac{2X - n}{\sqrt{n}}.$$

$E[T] = 0$, $\sigma[T] = 1$. つまり確率変数 $T = \frac{2X - n}{\sqrt{n}}$ の平均値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ は n の値とは無関係に一定である. この確率変数 T がとる値の確率をグラフにしてみる.

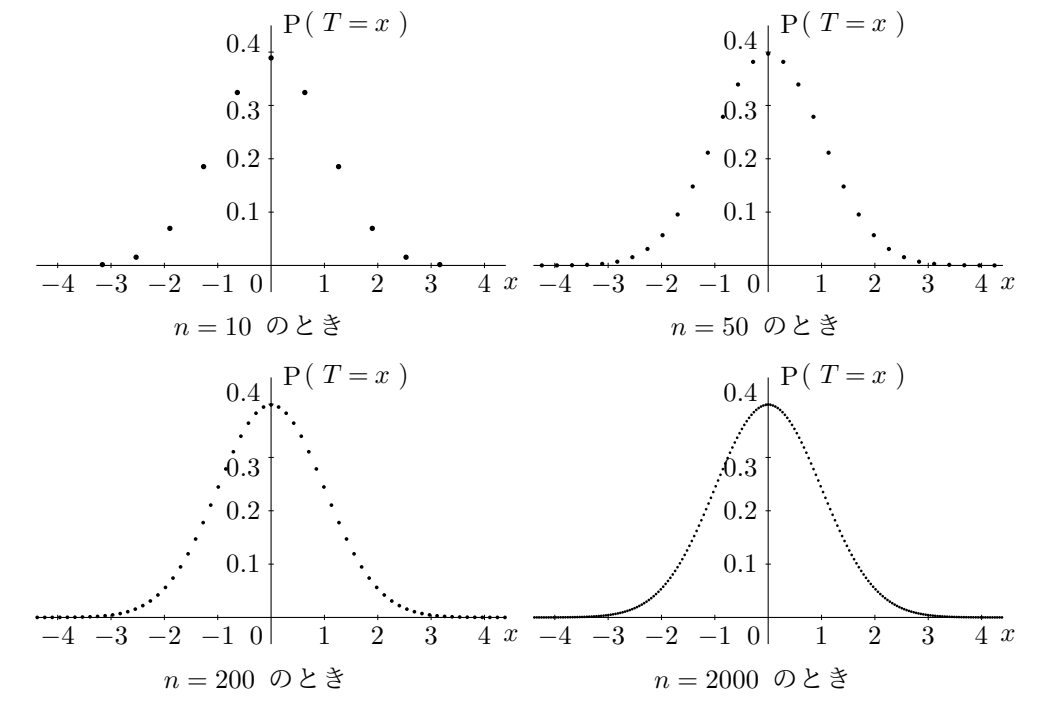
例として $n = 4$ とする. 2 項分布 $B\left(4,\frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数 X に対して, 確率変数 T は

$$T = \frac{X - E[X]}{\sqrt{V[X]}} = \frac{2X - 4}{\sqrt{4}} = X - 2,$$

よって $X = T + 2$. 従って,

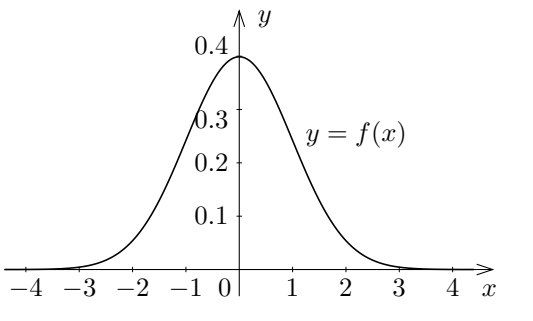


確率変数 T がとる値の確率をグラフは右上の図のようになる. 同様にして $n = 10, 50, 200, 2000$ のときのグラフを描く.



このように, n を限りなく大きくしていくと, 確率変数 T の確率のグラフは右図のような曲線に限りなく近づく. この曲線をグラフとする関数 $f(x)$ は次のようになる:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$



この関数 $f(x)$ を確率密度関数とする確率分布を**標準正規分布**という.

標準正規分布を一般化した**正規分布** (normal distribution) を定義する.

[定理] 定数 μ, σ が実数で $\sigma > 0$ であるとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = 1.$$

この定理により, 定数 μ, σ が実数で $\sigma > 0$ であるとき, 変数 x の関数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ は確率変数の確率密度関数である.

[定義] 定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとは, X の確率密度関数 $f(x)$ が次のように与えられることである:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

[定理 3.4.1] 定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X の平均値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ は,

$$E[X] = \mu, \quad V[X] = \sigma^2.$$

このように, 定数 μ 及び正の定数 σ に対して, 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ におけるパラメータ μ は平均値で σ^2 は分散である.

定数 μ 及び正の定数 σ に対する正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ において, $\mu = 0$ かつ $\sigma = 1$ とする. このとき, 正規分布 $N(\mu, \sigma^2) = N(0, 1)$ の確率密度関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

これは標準正規分布の確率密度関数である. よって, 標準正規分布は平均値が 0 であり標準偏差が 1 である特別な正規分布 $N(0, 1)$ である.

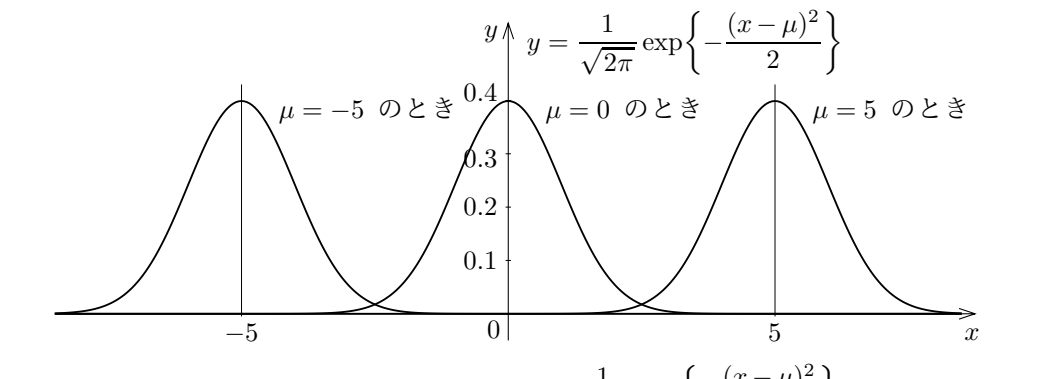
定数 μ 及び正の定数 σ に対して, 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X の平均値は $E[X] = \mu$ で標準偏差は $\sigma[X] = \sigma$ なので, X を標準化した確率変数 Z は

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sigma[X]} = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

この標準化された確率変数 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. このことは次節で重要になる.

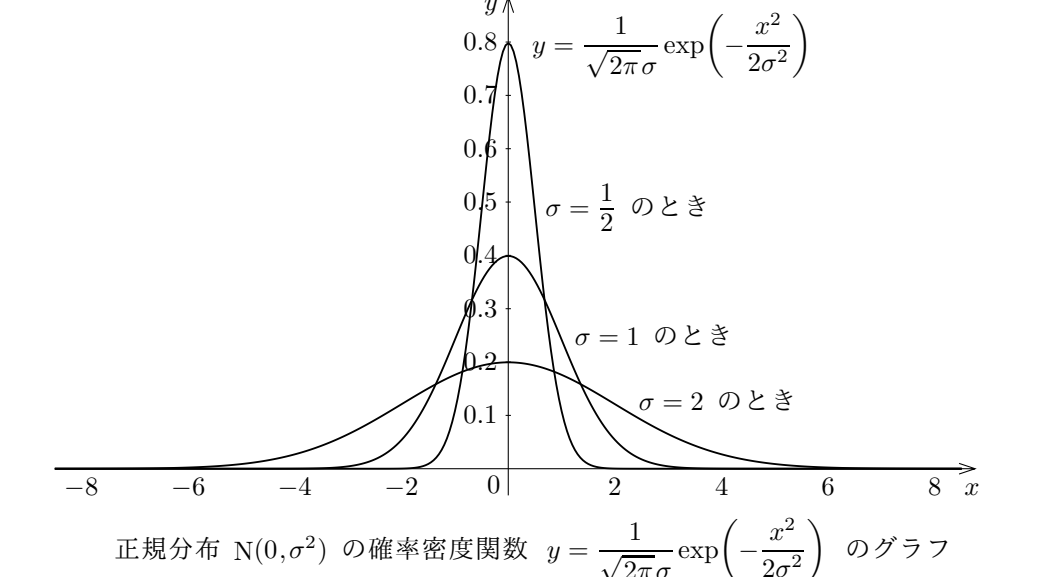
[定理 3.4.2] 定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うならば, X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

実数 μ について $\mu = -5, 0, 5$ のとき, 分散が 1 の正規分布 $N(\mu, 1)$ の確率密度関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right\}$ のグラフは次のようになる.



正規分布 $N(\mu, 1)$ の確率密度関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right\}$ のグラフ

実数 σ について $\sigma = \frac{1}{2}, 1, 2$ のとき, 平均値が 0 の正規分布 $N(0, \sigma^2)$ の確率密度関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ のグラフは次のようになる.



正規分布 $N(0, \sigma^2)$ の確率密度関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ のグラフ