

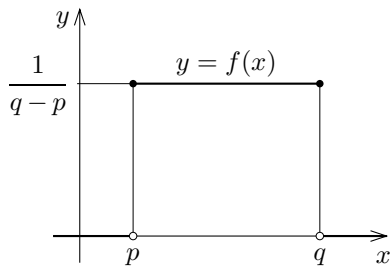
§ 3.3 一様分布

定数 p, q は実数で $p < q$ とする．関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q-p} & (p \leq x \leq q \text{ のとき}) \\ 0 & (x < p \text{ または } x > q \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 $f(x)$ のグラフは右図のようになる．この関数 $f(x)$ について，任意の実数 x について $f(x) \geq 0$ であり，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_p^q \frac{1}{q-p} dx = \frac{1}{q-p} [x]_p^q \\ &= \frac{1}{q-p} (q-p) \\ &= 1 . \end{aligned}$$



従ってこの関数 $f(x)$ は確率変数の確率密度関数になる．このような関数を確率密度関数とする確率分布を一様分布 (uniform distribution) という．

[定義] 定数 p, q は実数で $p < q$ とする．確率変数 X が p から q までの一様分布に従うとは， X の確率密度関数 $f(x)$ が次のように与えられることである：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q-p} & (p \leq x \leq q \text{ のとき}) \\ 0 & (x < p \text{ または } x > q \text{ のとき}) \end{cases} .$$

実数 p, q について $p < q$ であるとき， p から q までの一様分布に従う確率関数の値は，直観的にいうと， p から q までの間のどこも同じ確率になる．例えば，ある駅から 20 分間隔で電車が発車するとき，時刻を考えずにでたらめにこの駅に行くときに電車が発車するまで駅で待つ時間（単位は分）を表す変数 X は 0 から 20 までの一様分布に従うはずである．

実数 p, q について $p < q$ とする． p から q までの一様分布に従う確率変数 X の確率密度関数 f は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q-p} & (p \leq x \leq q \text{ のとき}) \\ 0 & (x < p \text{ または } x > q \text{ のとき}) \end{cases} .$$

確率変数 X の平均値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ とを求める．

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_p^q x \frac{1}{q-p} dx = \frac{1}{q-p} \left[\frac{x^2}{2} \right]_p^q = \frac{1}{q-p} \frac{q^2 - p^2}{2} \\ &= \frac{p+q}{2} . \end{aligned}$$

定理 2.4.1 により，

$$V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{p+q}{2} \right)^2 f(x) dx = \int_p^q \left(x - \frac{p+q}{2} \right)^2 \frac{1}{q-p} dx .$$

この定積分を簡単に計算するために変数 y を $y = x - \frac{p+q}{2}$ とおく． $\frac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$ ． $x = p$ のとき $y = \frac{p-q}{2}$ ， $x = q$ のとき $y = \frac{q-p}{2}$ ．

$$\begin{aligned} \int_p^q \left(x - \frac{p+q}{2} \right)^2 \frac{1}{q-p} dx &= \frac{1}{q-p} \int_{\frac{p-q}{2}}^{\frac{q-p}{2}} y^2 dy = \frac{1}{q-p} \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{\frac{p-q}{2}}^{\frac{q-p}{2}} \\ &= \frac{1}{q-p} \left\{ \frac{(q-p)^3}{24} - \frac{(p-q)^3}{24} \right\} = \frac{(q-p)^3 + (q-p)^3}{24(q-p)} \\ &= \frac{(q-p)^2}{12} . \end{aligned}$$

故に $V[X] = \frac{(q-p)^2}{12}$ ． p から q までの一様分布に従う確率変数 X の平均値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ とは次のようになる：

$$E[X] = \frac{p+q}{2} , \quad V[X] = \frac{(p-q)^2}{12} .$$