

§ 3.2 ポアソン分布

以下では e は自然対数の底を表す： $e = \lim_{x \rightarrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828 \cdots$.

[指数関数のマクローリン展開] 任意の実数 x について

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ .$$

正の実数 λ について、 $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ なので、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1 \ .$$

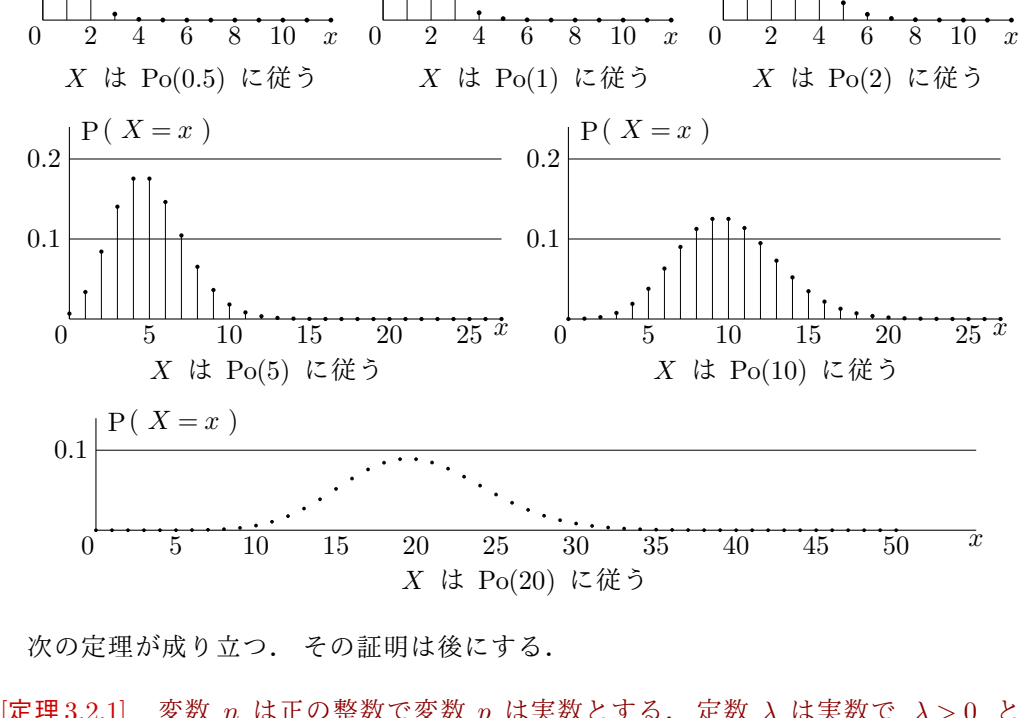
このことより、各自然数 $k=0,1,2,3,\ldots$ に対して $\mathrm{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ である離散型確率変数 X を考えることができる．この確率分布を**ポアソン分布**¹⁾ (Poisson distribusion) という．

[定義] 定数 λ は実数で $\lambda > 0$ とする．確率変数 X がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとは、 X がとり得る値が自然数 $0,1,2,3,\ldots$ であり、各自然数 $k=0,1,2,3,\ldots$ に対して

$$\mathrm{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

であることである．

ポアソン分布に従う確率変数 X について、実数 x に対する確率 $\mathrm{P}(X=x)$ のグラフは次のようになる．



次の定理が成り立つ．その証明は後にする．

[定理 3.2.1] 変数 n は正の整数で変数 p は実数とする．定数 λ は実数で $\lambda > 0$ とする． $np = \lambda$ として $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow +0$ とするとき、2 項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ はポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に収束する．つまり、確率変数 X が $\mathrm{B}(n,p)$ に従い確率変数 Y が $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとき、 $pn = \lambda$ として $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow +0$ とすると、自然数 k に対して

$$\mathrm{P}(X=k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{P}(Y=k) \ .$$

この定理から分かるように、ある条件の下で 2 項分布の極限がポアソン分布になる．

ある都市では一日平均 3 件の交通事故が発生するとする．ある日のこの都市での交通事故の発生件数を表す変数を X とおく．この確率変数 X がどのような確率分布に従うか考える．

充分大きい自然数 n に対して一日を n 等分する．例えば $n = 10000$ のとき、一日の n 分の一は 8.64 秒のごく短い時間である．一日平均 3 件しか起こらないような事なので、この短い時間に事故が 2 件以上発生する確率は無視する．一日平均 3 件の交通事故が発生するので、一日を n 等分したときの n 個の小区間のうち平均的に 3 個の割合で事故が発生する．よって、一日を n 等分したときの各小区間において事故が起きる確率は $\frac{3}{n}$ である．一日間では事故が起きる確率が $\frac{3}{n}$ である小期間が n 回あるので、一日の事故の数を表す確率変数 X は近似的に 2 項分布 $\mathrm{B}\left(n, \frac{3}{n}\right)$ に従う．分割の数 n を大きくしていくとこの近似は次第に正確になると考えられる． $n \rightarrow \infty$ とするとき 2 項分布 $\mathrm{B}\left(n, \frac{3}{n}\right)$ の極限はポアソン分布 $\mathrm{Po}(3)$ である．故に、一日の事故の数を表す確率変数 X はポアソン分布 $\mathrm{Po}(3)$ に従うと考えられる．

一般的に、偶発的にときどき起こる事件について、ある長さの時間のうちにその事件が起きる回数を表す確率変数はポアソン分布に従うものと考えられる．例えば、あまり頻度の多くない出来事が起きる回数、普通の世帯に掛かってくる電話の回数、などはポアソン分布に従うとされている．

ポアソン分布の平均値と分散とは次のようになる．その証明は後にする．

[定理 3.2.2] 定数 λ は実数で $\lambda > 0$ とする．確率変数 X がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うならば、 X は離散型確率変数であり、 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ と分散 $\mathrm{V}[X]$ とは、

$$\mathrm{E}[X] = \lambda \ , \qquad \mathrm{V}[X] = \lambda \ .$$

[例] ある都市では平均すると 3 日間に 5 件の交通事故が発生するとする．この都市で 1 日に発生する交通事故の件数を表す変数 X はポアソン分布に従う確率変数であるとする．確率 $\mathrm{P}\left(X \leq \frac{9}{4}\right)$ 及び $\mathrm{P}(X \geq \sqrt{3})$ を求める．

確率変数 X の平均値は $\frac{5}{3}$ なので、 X はポアソン分布 $\mathrm{Po}\left(\frac{5}{3}\right)$ に従う． X がとりうる値 $k=0,1,2,3,4,\ldots$ に対して

$$\mathrm{P}(X=k) = e^{-\frac{5}{3}} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^k}{k!} = \frac{e^{-\frac{5}{3}}}{k!} \left(\frac{5}{3}\right)^k \ .$$

これより、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X \leq \frac{9}{4}\right) &= \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1) + \mathrm{P}(X=2) \\ &= \frac{e^{-\frac{5}{3}}}{0!} \left(\frac{5}{3}\right)^0 + \frac{e^{-\frac{5}{3}}}{1!} \left(\frac{5}{3}\right)^1 + \frac{e^{-\frac{5}{3}}}{2!} \left(\frac{5}{3}\right)^2 = e^{-\frac{5}{3}} \left(1 + \frac{5}{3} + \frac{25}{9}\right) \\ &= \frac{49}{9} e^{-\frac{5}{3}} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \geq \sqrt{3}) &= 1 - \mathrm{P}(X < \sqrt{3}) = 1 - \mathrm{P}(X=0) - \mathrm{P}(X=1) \\ &= 1 - \frac{e^{-\frac{5}{3}}}{0!} \left(\frac{5}{3}\right)^0 - \frac{e^{-\frac{5}{3}}}{1!} \left(\frac{5}{3}\right)^1 = 1 - e^{-\frac{5}{3}} \left(1 + \frac{5}{3}\right) \\ &= 1 - \frac{8}{3} e^{-\frac{5}{3}} \ . \end{aligned} \tag{終}$$

[問 3.2.1] ある家には平均すると 5 日間に 2 人の訪問者があるとする．この家で 1 日に来る訪問者の人数を表す変数 X はポアソン分布に従う確率変数であるとする．確率 $\mathrm{P}\left(X \leq \frac{7}{3}\right)$ 及び $\mathrm{P}(X \geq \sqrt{7})$ を求めよ．

正の整数 n が充分大きくて正の実数 p が 0 に近いとする．定理 3.2.1 により、2 項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ はポアソン分布 $\mathrm{Po}(np)$ で近似できる．計算機では 2 項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ に関する確率よりポアソン分布 $\mathrm{Po}(np)$ に関する確率の方が速く計算できるので、2 項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ をポアソン分布 $\mathrm{Po}(np)$ で近似して計算することがある．

[例] ある工場で製造される製品の中に含まれる不良品の割合は約 $\frac{3}{5000}$ とする．この工場である月に製造された約 2 万個の製品の中に含まれる不良品の個数を表す変数を X とおく．個々の製品が不良品になる確率は他の製品の状態に無関係に $\frac{3}{5000}$ であるとする．このとき X は近似的に 2 項分布 $\mathrm{B}\left(20000, \frac{3}{5000}\right)$ に従う確率変数である．ここで不良品になる確率も製造された製品の個数も必ずしも正確な数値ではない．また、この 2 項分布について確率を計算する途中の組合せ ${}_{20000}\mathrm{C}_k$ の計算には手間がかかる．2 項分布 $\mathrm{B}\left(20000, \frac{3}{5000}\right)$ はポアソン分布 $\mathrm{Po}\left(20000 \cdot \frac{3}{5000}\right) = \mathrm{Po}(12)$ で近似できるので、近似的に X はポアソン分布 $\mathrm{Po}(12)$ に従うとして確率を計算するのが現実的である．故に、 X がとりうる値 $k=0,1,2,3,4,\ldots$ に対して $\mathrm{P}(X=k) \asymp \frac{e^{-12} 12^k}{k!}$ と近似する．[終]

[問 3.2.2] 死亡した人の中である病気が原因で死亡した人の割合が約 $\frac{1}{500}$ とする．ある年にある都市において亡くなった人の数が約 3000 であったとする．この年にこの都市においてこの病気 で亡くなった人の数を表す変数を X とおく．死亡者がこの病気 で死亡した確率は他の市民の状況とは無関係に $\frac{1}{500}$ であるとする．このとき変数 X は 2 項分布に従う確率変数である．この 2 項分布をポアソン分布で近似して、 X がとりうる値 $k=0,1,2,3,4,\ldots$ に対して確率 $\mathrm{P}(X=k)$ を近似する式を求めよ．

————— ポアソン分布に関する定理の証明

[定理 3.2.1] 変数 n は正の整数で変数 p は実数とする．定数 λ は実数で $\lambda > 0$ とする． $pn = \lambda$ として $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow +0$ とするとき、2 項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ はポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に収束する．つまり、確率変数 X が $\mathrm{B}(n,p)$ に従い確率変数 Y が $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとき、 $pn = \lambda$ として $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow +0$ とすると、自然数 k に対して

$$\mathrm{P}(X=k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{P}(Y=k) \ .$$

[証明] 確率変数 X が $\mathrm{B}(n,p)$ に従い確率変数 Y が $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとする． $pn = \lambda$ とする． $p = \frac{\lambda}{n}$, $n = \frac{\lambda}{p}$ なので、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=k) &= {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k (1-p)^{n(1-p)^{-k}} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \{1+(-p)\}^{\frac{\lambda}{p}} (1-p)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{n^k} \{1+(-p)\}^{\frac{-\lambda}{p}} (1-p)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \{1+(-p)\}^{\frac{1-p}{p}(-\lambda)} (1-p)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \left[\{1+(-p)\}^{\frac{1-p}{p}}\right]^{-\lambda} (1-p)^{-k} \ . \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow +0$ とする．このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \ , \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1 \ , \qquad \cdots \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) = 1 \ .$$

また、

$$\lim_{p \rightarrow +0} (1-p)^{-k} = 1^{-k} = 1 \ .$$

更に、 $t = -p$ とおくと、 $p \rightarrow +0$ のとき $t \rightarrow -0$ なので、

$$\lim_{p \rightarrow +0} \{1+(-p)\}^{\frac{1}{-p}} = \lim_{t \rightarrow -0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e \ ,$$

従って

$$\lim_{p \rightarrow +0} \left[\{1+(-p)\}^{\frac{1}{-p}}\right]^{-\lambda} = \left[\lim_{p \rightarrow +0} \{1+(-p)\}^{\frac{1}{-p}}\right]^{-\lambda} = e^{-\lambda} \ .$$

故に、 $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow +0$ のとき、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=k) &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \left[\{1+(-p)\}^{\frac{1}{-p}}\right]^{-\lambda} (1-p)^{-k} \\ &\rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot e^{-\lambda} \cdot 1 = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \mathrm{P}(Y=k) \ . \end{aligned} \tag{証明終了}$$

[定理 3.2.2] 定数 λ は実数で $\lambda > 0$ とする．確率変数 X がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとき、 $\mathrm{E}[X] = \lambda$, $\mathrm{V}[X] = \lambda$.

[証明] 確率変数 X がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとする． X がとり得る値は自然数 $k=0,1,2,3,4,\ldots$ であり、 $\mathrm{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} \{k \mathrm{P}(X=k)\} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{k \mathrm{P}(X=k)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \{k \mathrm{P}(X=k)\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda \lambda^k}{k!}\right) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right) \ , \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right) = 1 \quad \text{なので} \quad \mathrm{E}[X] = \lambda \ .$$

$$\mathrm{E}[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} \{k(k-1) \mathrm{P}(X=k)\} = 0 + 0 + \sum_{k=2}^{\infty} \{k(k-1) \mathrm{P}(X=k)\}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \{k(k-1) \mathrm{P}(X=k)\} = \sum_{k=2}^{\infty} \left\{k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right\}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left\{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-2)!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+2}}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^2 \lambda^k}{k!}\right)$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right) \ .$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right) = 1 \quad \text{なので、}$$

$$\mathrm{E}[X(X-1)] = \lambda^2 \ .$$

左辺は $\mathrm{E}[X(X-1)] = \mathrm{E}[X^2 - X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \lambda$ なので、 $\mathrm{E}[X^2] - \lambda = \lambda^2$, $\mathrm{E}[X^2] = \lambda^2 + \lambda$. 定理 2.4.4 より、

$$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \ .$$

[証明終了]

¹⁾ ポアソンはフランスの数学者の名前である．