

離散型確率変数 X がとり得る値 x に確率 $P(X=x)$ を対応させる関数や、連続型確率変数 X の確率密度関数を、 X の確率分布という。

§ 3.1 2 項分布

[2 項定理] 自然数 n 及び数 a と b について、

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + {}_nC_3a^{n-3}b^3 + \cdots + \\ &\quad {}_nC_{n-3}a^3b^{n-3} + {}_nC_{n-2}a^2b^{n-2} + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n \\ &= \sum_{k=0}^n ({}_nC_ka^{n-k}b^k) \, .\end{aligned}$$

実数 p に対して、 $a=1-p$, $b=p$ とする． 自然数 n に対して、2 項定理により

$$(1-p+p)^n = \sum_{k=0}^n \{ {}_nC_kp^k(1-p)^{n-k} \} \, .$$

この等式の左辺は $(1-p+p)^n = 1^n = 1$ なので、

$$\sum_{k=0}^n \{ {}_nC_kp^k(1-p)^{n-k} \} = 1 \, .$$

このことより、 $0 \leq p \leq 1$ のとき、 0 以上 n 以下の各自然数 $k=0,1,2,3,\ldots,n-2,n-1,n$ に対して $P(X=k) = {}_nC_kp^k(1-p)^{n-k}$ となる離散型確率変数 X を考えることができる． この確率分布を**2 項分布** (binomial distribution) という．

[定義] 定数 n は自然数で、定数 p は実数で $0 \leq p \leq 1$ とする． 確率変数 X が 2 項分布 $B(n,p)$ に従うとは、 X がとり得る値が n 以下の自然数 $0,1,2,3,\ldots,n$ であり、 n 以下の各自然数 $k=0,1,2,3,\ldots,n$ に対して

$$P(X=k) = {}_nC_kp^k(1-p)^{n-k}$$

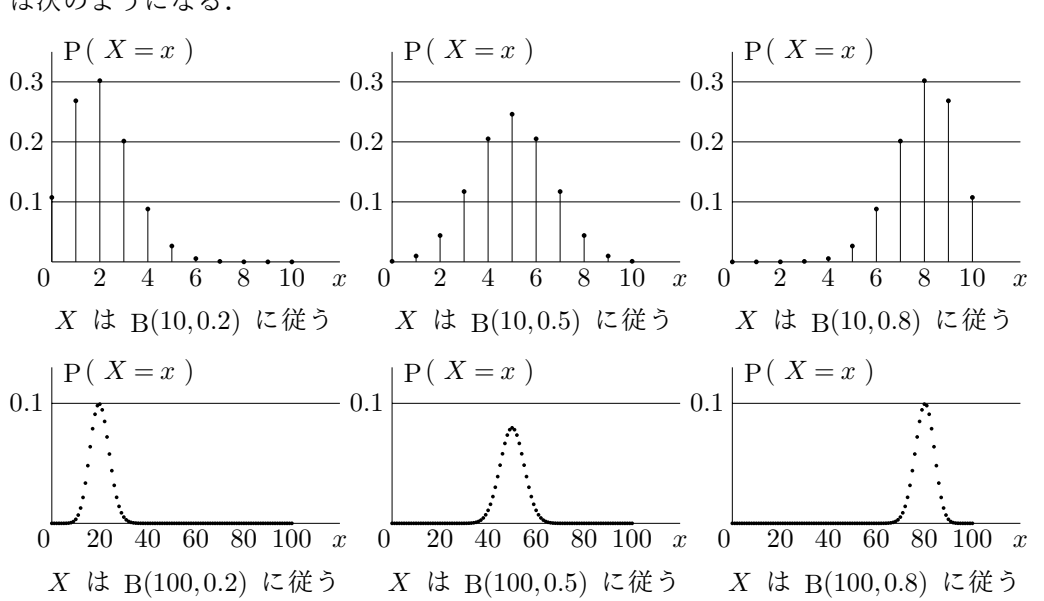
となることである．

[定理] 試行 T において事象 A が起きる確率が p であるとする． 自然数 n,k について $k \leq n$ とする． 試行 T を独立に n 回行うという試行において、事象 A が起きる回数が丁度 k になる確率は ${}_nC_kp^k(1-p)^{n-k}$ である．

この定理より直ぐに次のことが分かる．

[定理 3.1.1] 定数 n は自然数で、定数 p は実数で $0 \leq p \leq 1$ とする． 試行 T において事象 A が起きる確率が p であるとする． この試行 T を独立に n 回行うとき、 T の n 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数を X とおくと、 X は確率変数であり、2 項分布 $B(n,p)$ に従う．

2 項分布に従う確率変数 X について、実数 x に対する確率 $P(X=x)$ のグラフは次のようになる．



2 項分布の平均値と分散とは次のようになる． その証明は後にする．

[定理 3.1.2] 定数 n は自然数で、定数 p は実数で $0 \leq p \leq 1$ とする． 確率変数 X が 2 項分布 $B(n,p)$ に従うならば、 X は離散型確率変数であり、 X の平均値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ とは、

$$E[X] = np \, , \quad V[X] = np(1-p) \, .$$

[例題] 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{1}{3}$ であるとする． この試行を独立に 4 回行うとき、この 4 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である． 確率変数 X の平均値 $E[X]$ 及び分散 $V[X]$ とを求める． また、確率 $P\left(X \geq \frac{5}{2}\right)$ 及び $P(1 \leq X \leq \sqrt{11})$ を求める．

確率変数 X は 2 項分布 $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ に従うので、

$$E[X] = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \, , \quad V[X] = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \, .$$

X がとりうる値 $k=0,1,2,3,4$ に対して

$$P(X=k) = {}_4C_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{4-k} \, .$$

これより、

$$\begin{aligned}P\left(X \geq \frac{5}{2}\right) &= P(X=3) + P(X=4) = {}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1 + {}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ &= {}_4C_1 \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \frac{2}{3} + {}_4C_0 \cdot \frac{1}{3^4} = 4 \cdot \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^4} = \frac{8+1}{3^4} \\ &= \frac{1}{9} \, ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(1 \leq X \leq \sqrt{11}) &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &= {}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3 + {}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + {}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{3^1} \cdot \frac{2^3}{3^3} + 6 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{2^2}{3^2} + 4 \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \frac{2^1}{3^1} = \frac{32+24+8}{3^4} \\ &= \frac{64}{81} \, .\end{aligned}$$

終

[問 3.1] 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{2}{3}$ であるとする． この試行を独立に 5 回行うとき、この 5 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である． 確率変数 X の平均値 $E[X]$ 及び分散 $V[X]$ を求めよ． また、確率 $P\left(X \leq \frac{9}{4}\right)$ 及び $P(\sqrt{7} \leq X \leq 4)$ を求めよ．

2 項分布に関する定理の証明

[定理 3.1] 定数 n は自然数で、定数 p は実数で $0 \leq p \leq 1$ とする． 確率変数 X が 2 項分布 $B(n,p)$ に従うとき、 $E[X] = np$, $V[X] = np(1-p)$.

[証明] 確率変数 X が 2 項分布 $B(n,p)$ に従うとする． $q = 1-p$ とおく． X がとり得る値は 0 以上 n 以下の自然数 $k=0,1,2,3,\ldots,n$ であり、

$$P(X=k) = {}_nC_kp^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k} \, .$$

$$\begin{aligned}E[X] &= \sum_{k=0}^n \{ k P(X=k) \} = 0 + \sum_{k=1}^n \{ k P(X=k) \} = \sum_{k=1}^n \{ k P(X=k) \} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{n!}{k!\{n-(k+1)\}!} p^{k+1} q^{n-(k+1)} \right\} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{(n-1)!n}{k!(n-1-k)!} p p^k q^{n-1-k} \right\} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} p^k q^{n-1-k} \right\} \, .\end{aligned}$$

2 項定理より、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} p^k q^{n-1-k} \right\} = (p+q)^{n-1} = 1^{n-1} = 1 \, .$$

従って $E[X] = np$.

$$\begin{aligned}E[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^n \{ k(k-1) P(X=k) \} = 0 + 0 + \sum_{k=2}^n \{ k(k-1) P(X=k) \} \\ &= \sum_{k=2}^n \{ k(k-1) P(X=k) \} = \sum_{k=2}^n \left\{ k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \right\} \\ &= \sum_{k=2}^n \left\{ \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \left\{ \frac{n!}{k!\{n-(k+2)\}!} p^{k+2} q^{n-(k+2)} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \left\{ \frac{(n-2)!(n-1)n}{k!(n-2-k)!} p^2 p^k q^{n-2-k} \right\} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \left\{ \frac{(n-2)!}{k!\{n-2-k\}!} p^k q^{n-2-k} \right\} \, .\end{aligned}$$

2 項定理により、

$$\sum_{k=0}^{n-2} \left\{ \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} p^k q^{n-2-k} \right\} = (p+q)^{n-2} = 1^{n-2} = 1 \, .$$

$$E[X(X-1)] = n(n-1)p^2 \, .$$

$E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X] = E[X^2] - np$ なので $E[X^2] - np = n(n-1)p^2$, よって

$$E[X^2] = n^2p^2 - np^2 + np \, .$$

定理 2.4.4 より

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np = np(1-p) \, .$$

証明終了