

§ 2.3 確率変数の平均値

1.2節で述べたように、データの代表値として平均があった。 同様に、確率変数についても**平均値** (mean value) の概念がある。

例 あるくじには当たりと外れとがあり、当たる確率はいつも $\frac{1}{20}$ で当たると賞金 10 万円を貰えて、外れると賞金は貰えないものとする。 このくじを何回も引くと、20 回に 1 回ぐらいの割合で賞金 10 万円を貰える； 1 回あたりの平均では $10\text{万円} \times \frac{1}{20} = 5000\text{円}$ 貰える。 終

このようにして、確率変数の実現値の試行 1 回あたりの平均を考えることができる。

例 あるくじには 1 等賞の当たりと 2 等賞の当たりと外れとがあり、1 等賞が当たる確率はいつも $\frac{1}{20}$ で当たると賞金 10 万円を貰え、2 等賞が当たる確率はいつも $\frac{1}{5}$ で当たると賞金 1 万円を貰え、外れると賞金を貰えないものとする。 1 等賞が当たることと 2 等賞が当たることは互いに独立であるとする。 このくじを何回も引くときの 1 回あたりの貰える賞金の平均は次のようになる：

$$10\text{万円} \times \frac{1}{20} + 1\text{万円} \times \frac{1}{5} = 5000\text{円} + 2000\text{円} = 7000\text{円} . \quad \text{終}$$

このように、離散型確率変数の平均値は、確率変数の実現値とその実現値をとる確率との積の合計である。

離散型確率変数 X について以下の 2 条件のどちらかが成り立った：

(1) X がとり得る値の総てを互いに異なる実数より成る有限数列 $\{x_n\}_{0 \leq n \leq N}$ (N は自然数) で枚举できて、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \text{P}(X = x_n) &= \text{P}(X = x_0) + \text{P}(X = x_1) + \text{P}(X = x_2) + \cdots \\ &\quad + \text{P}(X = x_{N-1}) + \text{P}(X = x_N) \\ &= 1 ; \end{aligned}$$

(2) X がとり得る値の総てを互いに異なる実数より成る無限数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ で枚举できて、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \text{P}(X = x_n) &= \text{P}(X = x_0) + \text{P}(X = x_1) + \text{P}(X = x_2) + \cdots \\ &\quad + \text{P}(X = x_n) + \text{P}(X = x_{n+1}) + \cdots \\ &= 1 . \end{aligned}$$

[定義] 離散型確率変数 X の平均値 $\text{E}[X]$ を次のように定義する： X がとり得る値の総てを互いに異なる実数より成る有限数列 $\{x_n\}_{0 \leq n \leq N}$ (N は自然数) で枚举できて

$$\sum_{n=0}^N \text{P}(X = x_n) = 1 \text{ のとき, } X \text{ の平均値 } \text{E}[X] \text{ は}$$

$$\text{E}[X] = \sum_{n=0}^N \{x_n \text{P}(X = x_n)\} ;$$

X がとり得る値の総てを互いに異なる実数より成る無限数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ で枚举できて

$\sum_{n=0}^{\infty} \text{P}(X = x_n) = 1$ のとき、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \{x_n \text{P}(X = x_n)\}$ が収束するならば、 X の平均値 $\text{E}[X]$ は

$$\text{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \{x_n \text{P}(X = x_n)\} .$$

確率変数 X の実現値を調べる試行を何回も行うと、 X の実現値は様々な値になり得る。 確率変数 X の平均値とは、大雑把にいうと、試行を何回も行うときの X の実現値の平均である。 確率変数の平均値のことを期待値ということもある。

例 成績が 5 点、3 点、1 点、0 点、の 4 段階で点数化されるものとする。 成績の点数は、5 である確率は 30% であり、3 である確率は 40% であり、1 である確率は 20% であり、0 である確率は 10% であるとする。 成績の点数を表す変数を X とおく。 X のとりうる値は 5, 3, 1, 0 だけで、

$$\text{P}(X = 5) = \frac{3}{10}, \quad \text{P}(X = 3) = \frac{4}{10}, \quad \text{P}(X = 1) = \frac{2}{10}, \quad \text{P}(X = 0) = \frac{1}{10} .$$

よって、

$$\begin{aligned} \text{P}(X = 5) + \text{P}(X = 3) + \text{P}(X = 1) + \text{P}(X = 0) &= \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \\ &= 1 . \end{aligned}$$

故に変数 X は離散型確率変数である。 確率変数 X の平均値 $\text{E}[X]$ を求める。

$$\begin{aligned} \text{E}[X] &= 5 \cdot \text{P}(X = 5) + 3 \cdot \text{P}(X = 3) + 1 \cdot \text{P}(X = 1) + 0 \cdot \text{P}(X = 0) \\ &= 5 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10} = \frac{15}{10} + \frac{12}{10} + \frac{2}{10} \\ &= \frac{29}{10} . \end{aligned} \quad \text{終}$$

問 2.3.1 成績が 0 点、1 点、2 点、3 点、4 点、の 5 段階で点数化されるものとする。 成績の点数は、4 である確率は 10% であり、3 である確率は 20% であり、2 である確率は 40% であり、1 である確率は 20% であり、0 である確率は 10% であるとする。 成績の点数を表す変数を X とおく。 X は離散型確率変数である。 確率変数 X の平均値 $\text{E}[X]$ を求めよ。

連続型確率変数の平均値を考える。

例 人が長さを測らずに目分量で紐を 3m になるべく近い長さで切り出すとき、切り出した紐の実際の長さ (単位は m) を表す変数を X とおく。 この確率変数 X に関する確率について、次のように階級幅を $\Delta x = 0.5$ として確率の分布表を考える。

x	$x + \Delta x$	確率 $\text{P}(x < X \leq x + \Delta x)$	階級値
$-\infty$	2	0	
2	2.5	0.104	2.25
2.5	3	0.446	2.75
3	3.5	0.401	3.25
3.5	4	0.049	3.75
4	∞	0	

この表において、確率変数 X の平均値 $\text{E}[X]$ は、各階級の階級値とその階級に X の値が属す確率との積の合計で近似され则认为る。

$$\begin{aligned} \text{E}[X] &= 2.25 \cdot \text{P}(2 \leq X \leq 2.5) + 2.75 \cdot \text{P}(2.5 \leq X \leq 3) \\ &\quad + 3.25 \cdot \text{P}(3 \leq X \leq 3.5) + 3.75 \cdot \text{P}(3.5 \leq X \leq 4) \\ &= 2.25 \times 0.104 + 2.75 \times 0.446 + 3.25 \times 0.401 + 3.75 \times 0.049 \\ &\approx 2.948 . \end{aligned}$$

要素の個数が充分多いデータを元に確率が算出されているときは、階級幅を小さくして計算すると精密になる。 階級幅を $\Delta x = 0.2$ として確率の分布表を作る。

x	$x + \Delta x$	確率 $\text{P}(x < X \leq x + \Delta x)$	階級値
$-\infty$	2.2	0	
2.2	2.4	0.0486	2.3
2.4	2.6	0.1268	2.5
2.6	2.8	0.1766	2.7
2.8	3	0.1979	2.9
3	3.2	0.1908	3.1
3.2	3.4	0.1553	3.3
3.4	3.6	0.0913	3.5
3.6	3.8	0.0127	3.7
3.8	∞	0	

この表において、確率変数 X の平均値 $\text{E}[X]$ は、各階級の階級値とその階級に X の値が属す確率との積の合計で近似され则认为る。

$$\begin{aligned} \text{E}[X] &= 2.3 \cdot \text{P}(2.2 < X \leq 2.4) + 2.5 \cdot \text{P}(2.4 < X \leq 2.6) + 2.7 \cdot \text{P}(2.6 < X \leq 2.8) + \\ &\quad 2.9 \cdot \text{P}(2.8 < X \leq 3) + 3.1 \cdot \text{P}(3 < X \leq 3.2) + 3.3 \cdot \text{P}(3.2 < X \leq 3.4) + \\ &\quad 3.5 \cdot \text{P}(3.4 < X \leq 3.6) + 3.7 \cdot \text{P}(3.6 < X \leq 3.8) \\ &= 2.3 \cdot 0.0486 + 2.5 \cdot 0.1268 + 2.7 \cdot 0.1766 + 2.9 \cdot 0.1979 + \\ &\quad 3.1 \cdot 0.1908 + 3.3 \cdot 0.1553 + 3.5 \cdot 0.0913 + 3.7 \cdot 0.0127 \\ &\approx 2.9500 . \end{aligned}$$

$\text{E}[X]$ はほぼ 2.950 である。 終

この考え方を進める。

連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とおく。 実数 a, b について $a < b$ で、 X のとり得る値は a 以上 b 以下とする。 正の自然数 n に対して

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり、区間 $[a, b]$ を n 個の小さい区間つまり階級 $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $\dots$, $[x_{n-1}, x_n]$ に分割する。 階級 $[x_0, x_1]$ の階級幅 $x_1 - x_0$, 階級 $[x_1, x_2]$ の階級幅 $x_2 - x_1$, 階級 $[x_2, x_3]$ の階級幅 $x_3 - x_2$, $\dots$, 階級 $[x_{n-1}, x_n]$ の幅 $x_n - x_{n-1}$, の中で最も大きいものを δ_n とおく：

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき δ_n は 0 に収束するとする； $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$.

各階級 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) に属す階級値 ξ_k に対して、確率変数 X の平均値を次の式の値で近似する：

$$\begin{aligned} &\xi_1 \text{P}(x_0 \leq X \leq x_1) + \xi_2 \text{P}(x_1 \leq X \leq x_2) + \xi_3 \text{P}(x_2 \leq X \leq x_3) + \cdots \\ &\quad + \xi_{n-1} \text{P}(x_{n-2} \leq X \leq x_{n-1}) + \xi_n \text{P}(x_{n-1} \leq X \leq x_n) \\ &= \sum_{k=1}^n \{\xi_k \text{P}(x_{k-1} \leq X \leq x_k)\} . \end{aligned}$$

X に関する確率 $\text{P}(x_{k-1} \leq X \leq x_k)$ を X の値の幅 $x_k - x_{k-1}$ で割った式 $\frac{\text{P}(x_{k-1} \leq X \leq x_k)}{x_k - x_{k-1}}$ の極限値が X の確率密度関数 $f(x)$ の値なので、 $x_k - x_{k-1}$ の値が 0 に近いとき、

$$\begin{aligned} \frac{\text{P}(x_{k-1} \leq X \leq x_k)}{x_k - x_{k-1}} &\approx f(\xi_k) , \\ \text{P}(x_{k-1} \leq X \leq x_k) &\approx f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) , \end{aligned}$$

よって確率変数 X の平均値の近似式は

$$\sum_{k=1}^n \{\xi_k \text{P}(x_{k-1} \leq X \leq x_k)\} \approx \sum_{k=1}^n \{\xi_k f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

右辺の式は関数 $xf(x)$ のリーマン和である；これを S_n とおく：

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{\xi_k f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \approx \sum_{k=1}^n \{\xi_k \text{P}(x_{k-1} \leq X \leq x_k)\} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき関数 $xf(x)$ のリーマン和 S_n が唯一つの実数に収束するならば、極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を確率変数 X の平均値とする。 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

が 0 に収束するので、関数 $xf(x)$ が a から b まで定積分可能であるならば、関数 $xf(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{\xi_k f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値は定積分 $\int_a^b xf(x)dx$ である：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b xf(x)dx .$$

関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であり、 X のとりうる値が a 以上 b 以下であり、関数 $xf(x)$ が a から b まで定積分可能であるとき、 X の平均値は定積分 $\int_a^b xf(x)dx$ とする。

確率変数 X の値の範囲を限定しないときは次のように考える：関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であり、関数 $xf(x)$ が実数全体において広義積分可能であるとき、 X の平均値は広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ とする。

[定義] 関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であるとき、 X の平均値 $\text{E}[X]$ を次のように定義する：広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ が収束するならば

$$\text{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx .$$

例 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(6-x)}{36} & (0 \leq x \leq 6 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 6 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

各実数 x について $f(x) \geq 0$ で、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ なので、この関数 $f(x)$ はある連続型確率変数 X の確率密度関数である。 確率変数 X の平均値 $\text{E}[X]$ を求める。

$$\begin{aligned} \text{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^6 x \frac{x(6-x)}{36} dx = \frac{1}{36} \int_0^6 (6x^2 - x^3) dx \\ &= \frac{1}{36} \left[2x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^6 = \frac{1}{36} (2 \cdot 6^3 - 9 \cdot 6^2) \\ &= 3 . \end{aligned} \quad \text{終}$$

問 2.3.2 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を問題 2.1.2 の関数と同じものと定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(2x + 3 - x^2) & (-1 \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < -1 \text{ または } x > 3 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

問 2.1.2 で調べたように、この関数 $f(x)$ はある連続型確率変数 X の確率密度関数である。 確率変数 X の平均値 $\text{E}[X]$ を求めよ。

確率変数の平均値は無いこともある。

例 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & (x \geq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 1 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 $f(x)$ は連続型確率変数の確率密度関数であるか調べる。 任意の実数 x について $f(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{u} + 1 \right) \\ &= 1 . \end{aligned}$$

よって関数 $f(x)$ は確率変数の確率密度関数である。 関数 $f(x)$ を確率密度関数とする連続型確率変数 X の平均値 $\text{E}[X]$ を調べる。

$$\begin{aligned} \text{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^{\infty} x \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u x \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} [\ln x]_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} (\ln u) \\ &= \infty . \end{aligned}$$

確率変数 X の平均値 $\text{E}[X]$ は無い。 終

以下の定理が成り立つ。

[定理 2.3.1] 確率変数 X の平均値 $\text{E}[X]$ があるならば、定数 c に対して、確率変数 $X + c$ の平均値は

$$\text{E}[X + c] = \text{E}[X] + c .$$

[定理 2.3.2] 確率変数 X の平均値 $\text{E}[X]$ があるならば、定数 k に対して、確率変数 kX の平均値は

$$\text{E}[kX] = k\text{E}[X] .$$

例 確率変数 X について $\text{E}[X] = -\frac{7}{3}$ とする。 変数 Y を $Y = \frac{6X+4}{5}$ とおく。 確率変数 Y の平均値 $\text{E}[Y]$ を求める。

$$\begin{aligned} \text{E}[Y] &= \text{E}\left[\frac{6X+4}{5}\right] = \frac{1}{5} \text{E}[6X+4] = \frac{1}{5} (\text{E}[6X] + 4) \\ &= \frac{1}{5} (6\text{E}[X] + 4) = \frac{1}{5} \left\{ 6 \cdot \left(-\frac{7}{3} \right) + 4 \right\} \\ &= -2 . \end{aligned} \quad \text{終}$$

問 2.3.3 確率変数 X について $\text{E}[X] = \frac{7}{2}$ とする。 変数 Y を $Y = \frac{9-4X}{5}$ とおく。 確率変数 Y の平均値 $\text{E}[Y]$ を求めよ。

次の定理が成り立つ。

[定理 2.3.3] 変数 X が連続型確率変数で関数 $f(x)$ が X の確率密度関数であるとき、変数 x の整式で表される関数 $\varphi(x)$ について広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx$ が収束するならば、確率変数 $\varphi(X)$ について $\text{E}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx$.