

§ 2.2 確率変数の関数

[定義] 確率変数 X の関数 $\varphi(X)$ について、 $Y = \varphi(X)$ である変数 Y が確率変数であるとき、この変数を確率変数 $\varphi(X)$ という。

変数 X は確率変数であるとする。

$p > 0$ である定数 p 及び定数 q に対して、 X の 1 次関数 $Y = pX + q$ を考える。任意の実数 a について、

$$Y \leq a \iff pX + q \leq a \iff pX \leq a - q \iff X \leq \frac{a - q}{p},$$

よって

$$P(Y \leq a) = P\left(X \leq \frac{a - q}{p}\right).$$

X が確率変数なので、確率 $P\left(X \leq \frac{a - q}{p}\right)$ が唯一つ定まる。よって確率 $P(Y \leq a)$ も唯一つ定まる。故に $Y = pX + q$ は確率変数である。

$p < 0$ である定数 p 及び定数 q に対して、 X の 1 次関数 $Y = pX + q$ を考える。任意の実数 a について、

$$Y \leq a \iff pX + q \leq a \iff pX \leq a - q \iff X \geq \frac{a - q}{p},$$

よって

$$P(Y \leq a) = P\left(X \geq \frac{a - q}{p}\right).$$

X が確率変数なので、確率 $P\left(X \geq \frac{a - q}{p}\right)$ が唯一つ定まる。よって確率 $P(Y \leq a)$ も唯一つ定まる。故に $Y = pX + q$ は確率変数である。

このように、0 でない定数 p 及び定数 q に対して、確率変数 X の 1 次関数 $Y = pX + q$ は確率変数である。

確率変数 X の 2 次関数 $Y = X^2$ を考える。実数 a について $a \geq 0$ のとき、

$$Y \leq a \iff X^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a},$$

よって $P(Y \leq a) = P(-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a})$ ；確率 $P(-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a})$ が唯一つ定まるので、確率 $P(Y \leq a)$ が唯一つ定まる。確率変数 X の値は実数なので、実数 a について $a < 0$ のとき、 $X^2 < a$ つまり $Y < a$ であることは無い；よって $P(Y \leq a) = 0$ 。このように、任意の実数 a に対して $Y \leq a$ である確率 $P(Y \leq a)$ が唯一つ定まる。故に確率変数 X の 2 次関数 $Y = X^2$ は確率変数である。

このような議論を発展させると次の定理が導かれる。

[定理 2.2] 変数 x の整式で表される関数 $\varphi(x)$ に対して、確率変数 X の関数 $Y = \varphi(X)$ も確率変数である。

[例] あるさいころを投げてでる目の数を変数 X で表す。このさいころはどの目も等確率ででるとする。このとき変数 X は確率変数である。更に、確率変数 Y を $Y = X^2 - 6X$ とおく。確率 $P(Y \leq -7)$ を求める。

$$\begin{aligned} Y \leq -7 &\iff X^2 - 6X \leq -7 \iff X^2 - 6X + 7 \leq 0 \\ &\iff (x - 3 + \sqrt{2})(x - 3 - \sqrt{2}) \leq 0 \\ &\iff 3 - \sqrt{2} \leq X \leq 3 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

確率変数 X がとり得る値は 1 から 6 までの自然数だけなので、

$$\begin{aligned} P(Y \leq -7) &= P(3 - \sqrt{2} \leq X \leq 3 + \sqrt{2}) \\ &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

終

[問 2.2] ジョーカーを除く 52 枚のトランプカードから等確率で 1 枚のカードを取り出し、カードの数を調べる。ジャックは 11 と、クイーンは 12 と、キングは 13 とみなす。取り出したカードの数を表す変数を X とおく。この変数 X は確率変数である。更に、確率変数 Y を $Y = X^2 - 8X$ とおく。確率 $P(Y \leq -9)$ を求めよ。