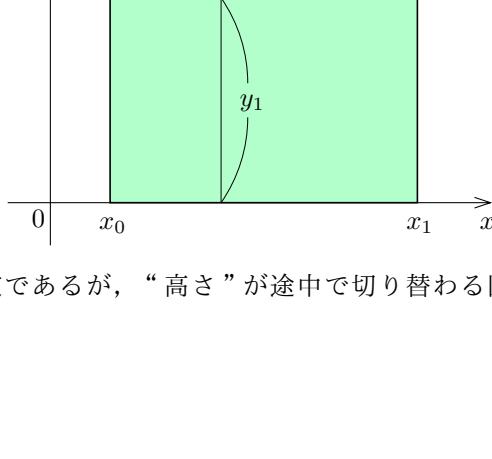


2.0 定積分の意味と定義

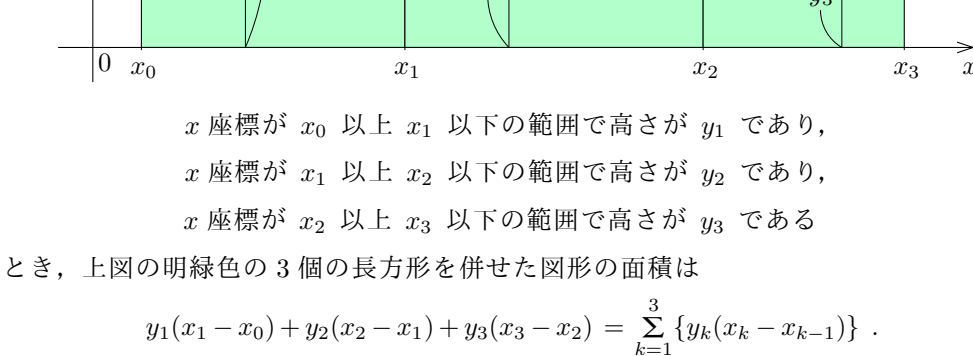
定積分は掛け算の拡張である。

xy 座標平面における領域の面積について考える。

右図のように、底辺が x 軸に含まれる長方形の点の x 座標の範囲が x_0 以上 x_1 以下であり高さが y_1 であるとする；この長方形で囲まれる明緑色の領域の面積は、横幅 $x_1 - x_0$ と高さ y_1 との積 $y_1(x_1 - x_0)$ である。



1 個だけの長方形では“高さ”が一定であるが、“高さ”が途中で切り替わる図形を考える。

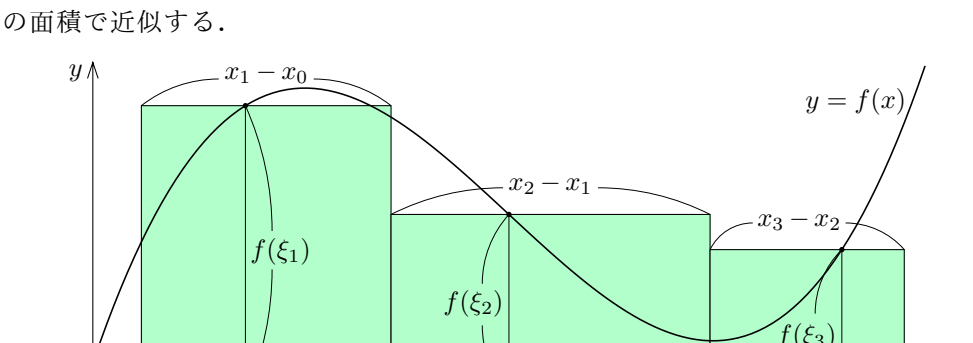


x 座標が x_0 以上 x_1 以下の範囲で高さが y_1 であり、
 x 座標が x_1 以上 x_2 以下の範囲で高さが y_2 であり、
 x 座標が x_2 以上 x_3 以下の範囲で高さが y_3 である

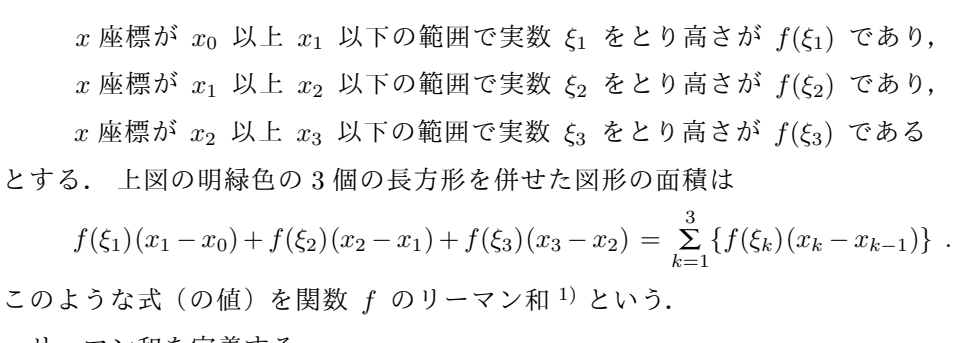
とき、上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$y_1(x_1 - x_0) + y_2(x_2 - x_1) + y_3(x_3 - x_2) = \sum_{k=1}^3 \{y_k(x_k - x_{k-1})\}.$$

x 軸からの“高さ”が x 座標の関数として変化する図形を考える。実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 f は区間 $[a, b]$ で連続で $a \leq x \leq b$ である各実数 x について $f(x) \geq 0$ とする。関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸と直線 $x = a$ と直線 $x = b$ とで囲まれる下図の明緑色の領域の面積を考える。



$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 = b$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び ξ_1, ξ_2, ξ_3 をとり、前の図の明緑色の部分の面積を、下図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積で近似する。



x 座標が x_0 以上 x_1 以下の範囲で実数 ξ_1 をとり高さが $f(\xi_1)$ であり、
 x 座標が x_1 以上 x_2 以下の範囲で実数 ξ_2 をとり高さが $f(\xi_2)$ であり、
 x 座標が x_2 以上 x_3 以下の範囲で実数 ξ_3 をとり高さが $f(\xi_3)$ である

とする。上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) = \sum_{k=1}^3 \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}.$$

このような式 (の値) を関数 f のリーマン和¹⁾ という。

リーマン和を定義する。

実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 f は区間 $[a, b]$ で連続で $a \leq x \leq b$ である各実数 x について $f(x) \geq 0$ とする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

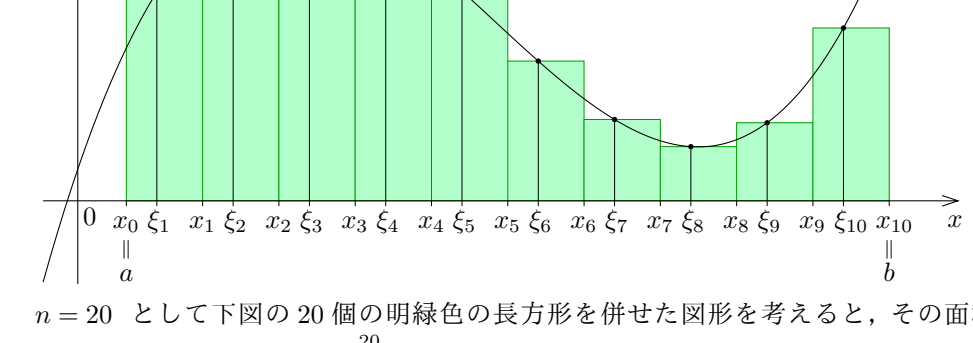
である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、 S_n を次のように定める：

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

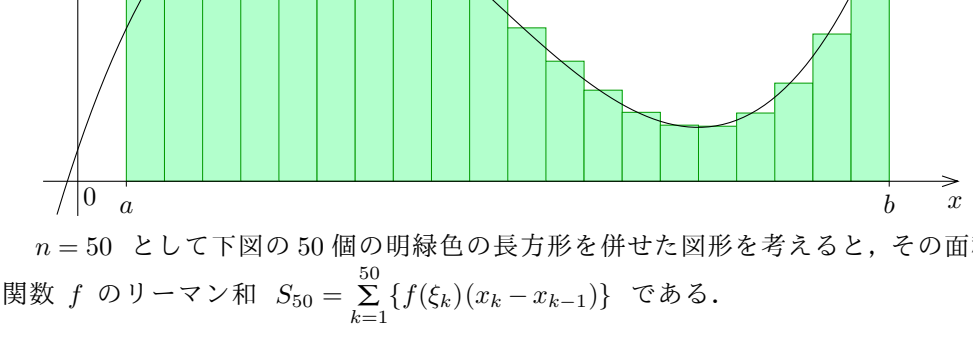
この S_n (の値) を関数 f のリーマン和という。

正の各自然数 n に対してリーマン和 S_n の値を定める。

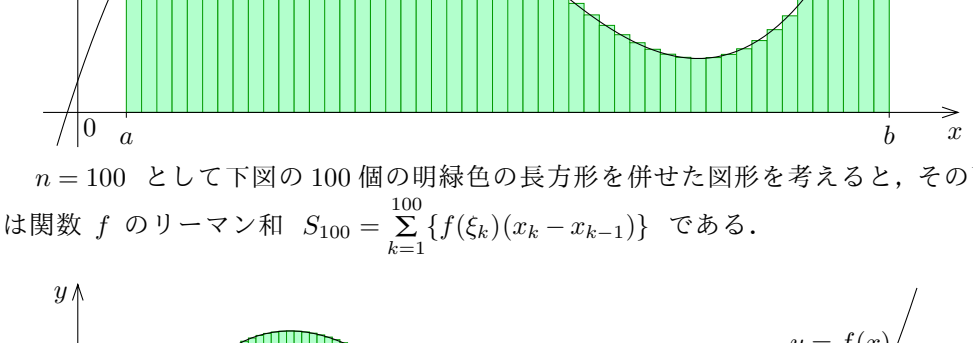
$n = 5$ として下図の 5 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると、その面積は関数 f のリーマン和 $S_5 = \sum_{k=1}^5 \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ である。



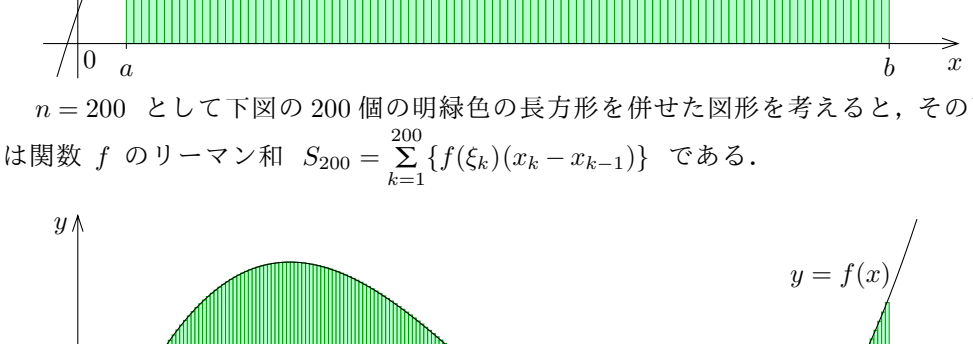
$n = 10$ として下図の 10 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると、その面積は関数 f のリーマン和 $S_{10} = \sum_{k=1}^{10} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ である。



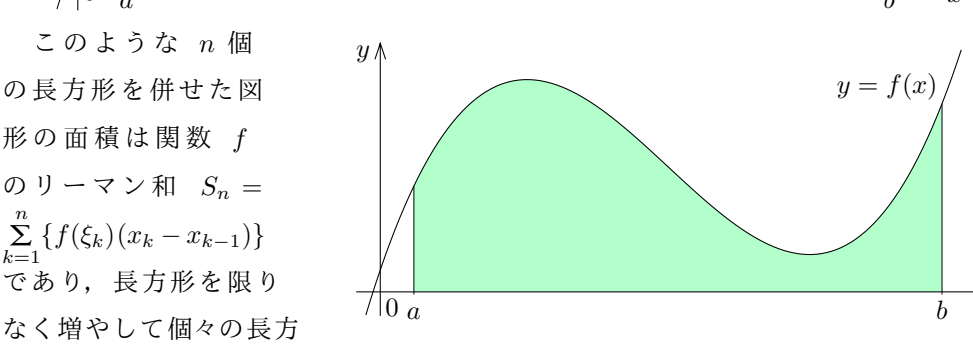
$n = 20$ として下図の 20 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると、その面積は関数 f のリーマン和 $S_{20} = \sum_{k=1}^{20} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ である。



$n = 50$ として下図の 50 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると、その面積は関数 f のリーマン和 $S_{50} = \sum_{k=1}^{50} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ である。



$n = 100$ として下図の 100 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると、その面積は関数 f のリーマン和 $S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ である。



このような n 個の長方形を併せた図形の面積は関数 f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ であり、長方形を限りなく増やして個々の長

方形を限りなく細くすると右上図の f のグラフを境界線とする図形の面積に限りなく近づく。故に上図の f のグラフを境界線とする図形の面積はリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ である。

関数 f のある条件を満たすリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が f の定積分である。

関数の定積分を定義する。

実数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ の中で最も大きい実数を次のように書き表す：

$$\max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}.$$

例えば次のようになる：

$$\max\{-2, 5, 3, -7\} = 5, \quad \max\left\{\frac{5}{6}, 3, \frac{9}{2}, \frac{7}{3}, 4\right\} = \frac{9}{2}.$$

実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり²⁾、区間 $[a, b]$ を n 個の小区間 $[x_0, x_1]$ 、 $[x_1, x_2]$ 、 $[x_2, x_3]$ 、 $\dots$ 、 $[x_{n-1}, x_n]$ に分割する。更に、

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1, \quad x_1 \leq \xi_2 \leq x_2, \quad x_2 \leq \xi_3 \leq x_3, \quad \dots, \quad x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n$$

である実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとる³⁾。 ξ_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) は小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ から選ばれた実数である。

