§9.5　指数・対数に関する不等式

定理9.1と定理9.2.2とを思い起こして下さい：定数 a について，

- $a>1$ のとき指数関数 a^x も対数関数 $\log_a x$ も単調増加であり，
- $0<a<1$ のとき指数関数 a^x も対数関数 $\log_a x$ も単調減少である．

実数 a について $a>1$ とします．実数 r,s とについて $r,s>0$ とします．対数関数 $\log_a x$ は単調増加ですから，

$$r<s \text{ ならば } \log_a r<\log_a s\ .$$

また，指数関数 a^x は単調増加ですから，

$$\log_a r<\log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r}<a^{\log_a s}\ ;$$

定理9.2.1より $a^{\log_a r}=r$, $a^{\log_a s}=s$ なので，

$$\log_a r<\log_a s \text{ ならば } r<s\ .$$

こうして次のことが導かれます：

$$r<s \iff \log_a r<\log_a s\ .$$

実数 a について $0<a<1$ とします．実数 r,s とについて $r,s>0$ とします．対数関数 $\log_a x$ は単調減少ですから，

$$r<s \text{ ならば } \log_a r>\log_a s\ .$$

また，指数関数 a^x は単調減少ですから，

$$\log_a r>\log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r}<a^{\log_a s}\ ;$$

定理9.2.1より $a^{\log_a r}=r$, $a^{\log_a s}=s$ なので，

$$\log_a r>\log_a s \text{ ならば } r<s\ .$$

こうして次のことが導かれました：

$$r<s \iff \log_a r>\log_a s\ .$$

このようにして次の定理が導かれます．

定理9.5　実数 a について $a>0$, $a\neq 1$ とする．

(1)　$a>1$ のとき，正の実数 r と s とについて，

$$r<s \iff \log_a r<\log_a s\ ,$$
$$r\leq s \iff \log_a r\leq\log_a s\ ;$$

(2)　$0<a<1$ のとき，正の実数 r と s とについて，

$$r<s \iff \log_a r>\log_a s\ ,$$
$$r\leq s \iff \log_a r\geq\log_a s\ .$$

例解　変数 x に関する不等式 $3^{x-5}<7$ を解きます．定理9.2.1より各実数 x について $\log_3 3^{x-5}=x-5$ なので，3 を底とする対数を考えます． $3^{x-5}>0$ なので，定理9.5より，

$$3^{x-5}<7 \iff \log_3 3^{x-5}<\log_2 7 \iff x-5<\log_3 7$$
$$\iff x<5+\log_3 7\ .$$

不等式 $3^{x-5}<7$ を解くと $x<5+\log_3 7$.　終

例題　変数 x に関する不等式 $7^{2x-5}\leq 63$ を解く．

〔解説〕各実数 x について $\log_7 7^{2x-5}=2x-5$ なので，7 を底とする対数を考える． $7^{2x-5}>0$ なので，不等式 $7^{2x-5}\leq 63$ より，

$$\log_7 7^{2x-5}\leq\log_7 63$$
$$2x-5\leq\log_7 63\ ,$$
$$2x\leq 5+\log_7 63\ ,$$
$$x\leq\frac{5+\log_7 63}{2}\ ,$$

更にこの右辺は

$$\frac{5+\log_7 63}{2}=\frac{5+\log_7(7\cdot 3^2)}{2}=\frac{5+1+2\log_7 3}{2}=3+\log_7 3\ .$$

与えられた不等式を解くと $x\leq 3+\log_7 3$.　終

問題 9.5.1　変数 x に関する不等式 $5^{2x-4}<45$ を解きなさい．

不等式の中に記号 x を含む式 $f(x)$ を真数とする対数の式 $\log_a f(x)$ が現れるとき，次のことに注意して下さい：

対数の式 $\log_a f(x)$ の真数 $f(x)$ は正である；

従って，その不等式が成り立つためには $f(x)>0$ でなければなりません．このことを真数条件といいます．

例解　変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解きます．まず，対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$, よって $x>\frac{6}{5}$ ．定理9.2.1より $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\log_3(5x-6)<2 \iff \log_3(5x-6)<\log_3 9\ ,$$

定理9.5より，

$$\log_3(5x-6)<\log_3 9 \iff 5x-6<9 \iff 5x<15 \iff x<3\ .$$

従って，不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解くと，$x>\frac{6}{5}$ かつ $x<3$ なので， $\frac{6}{5}<x<3$.　終

例題　変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7)>2$ を解く．

〔注意〕まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える．

〔方針〕右辺を 5 を底とする対数の式にする．

〔解説〕対数の式の真数は正なので， $3x+7>0$, よって $x>-\frac{7}{3}$ ．不等式 $\log_5(3x+7)>2$ の右辺は $2=\log_5 5^2=\log_5 25$ なので，

$$\log_5(3x+7)>\log_5 25\ ,$$
$$3x+7>25\ ,$$
$$x>6\ .$$

与えられた不等式を解くと， $x>-\frac{7}{3}$ かつ $x>6$ [8] なので， $x>6$.　終

問題 9.5.2　変数 k に関する不等式 $3-\log_2(5k-2)\geq 0$ を解きなさい．

例題　変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1\leq 0$ を解く．

〔注意〕まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える．

〔方針〕両辺が 9 を底とする一つの対数の式になるように変形する．

〔解説〕対数の式の真数は正なので， $2a-5>0$, よって $a>\frac{5}{2}$ ．不等式 $2\log_9(2a-5)-1\leq 0$ より

$$\log_9(2a-5)\leq\frac{1}{2}\ .$$

この不等式の右辺は $\frac{1}{2}=\log_9 9^{\frac{1}{2}}=\log_9(3^2)^{\frac{1}{2}}=\log_9 3$ なので，

$$\log_9(2a-5)\leq\log_9 3\ ,$$
$$2a-5\leq 3\ ,$$
$$a\leq 4\ .$$

与えられた不等式を解くと， $a>\frac{5}{2}$ かつ $a\leq 4$ なので， $\frac{5}{2}<a\leq 4$.　終

問題 9.5.3　変数 x に関する不等式 $3\log_8(5x-11)\geq 2$ を解きなさい．

実数 a について $0<a<1$ のとき，正の実数 r と s とについて，

$$\log_a r<\log_a s \iff r>s\ .$$

ですから，対数の式の底 a が 1 より小さいときは，両辺から対数記号 $\log_a$ を外すとき不等号の向きが逆になります．

例題　変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)>2$ を解く．

〔注意〕まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える．

〔方針〕右辺を $\frac{1}{2}$ を底とする対数の式にする．

〔解説〕対数の式の真数は正なので， $2y-1>0$, よって $y>\frac{1}{2}$ ．不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)\geq 2$ の右辺は $2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$ なので，

$$\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\ .$$

対数の式の底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいので，両辺から対数記号 $\log_{\frac{1}{2}}$ を外すとき不等号の向きが逆になる：

$$2y-1<\frac{1}{4}\ ,$$
$$y<\frac{5}{8}\ .$$

与えられた不等式を解くと， $y>\frac{1}{2}$ かつ $y<\frac{5}{8}$ なので， $\frac{1}{2}<y<\frac{5}{8}$.　終

問題 9.5.4　変数 z に関する不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(4z-5)+2\geq 0$ を解きなさい．

例題　変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く．

〔注意〕まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える．

〔方針〕両辺を 3 を底とする一つの対数の式にする．

〔解答〕対数の式の真数は正なので， $x+1>0$ かつ $x-7>0$, つまり $x>7$ ．不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ について，左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7)=\log_3\{(x+1)(x-7)\}\ ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\log_3\{(x+1)(x-7)\}\leq\log_3 9\ ,$$
$$(x+1)(x-7)\leq 9\ ,$$
$$x^2-6x-16\leq 0\ ,$$
$$(x+2)(x-8)\leq 0\ ,$$
$$-2\leq x\leq 8\ .$$

与えられた不等式を解くと， $x>7$ かつ $-2\leq x\leq 8$ なので， $7<x\leq 8$.　終

問題 9.5.5　変数 x に関する不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-3)\leq 5$ を解きなさい．

---

8) この例題では，不等式 $x>6$ を導く途中で $3x+7>25$ となっているので，真数条件 $3x+7>0$ は必然的に成り立ちます；ですから真数条件を別途考える必要は実はありません．