§8.8　指数の拡張

冪の指数の範囲を実数全体にまで更に広げます．例として 3 の $\sqrt{2}$ 乗 $3^{\sqrt{2}}$ を考えます． $\sqrt{2} = 1.414213562\cdots$ ですから，次のような値を計算できます：

$$\begin{aligned}
3^{1.41} &= 3^{\frac{141}{100}} = 4.70\cdots \ , \\
3^{1.414} &= 3^{\frac{1414}{1000}} = 4.727\cdots \ , \\
3^{1.4142} &= 3^{\frac{14142}{10000}} = 4.7287\cdots \ , \\
3^{1.41421} &= 3^{\frac{141421}{100000}} = 4.72878\cdots \ , \\
3^{1.414213} &= 3^{\frac{1414213}{1000000}} = 4.728801\cdots \ , \\
3^{1.4142135} &= 3^{\frac{14142135}{10000000}} = 4.7288041\cdots \ , \\
3^{1.41421356} &= 3^{\frac{141421356}{100000000}} = 4.72880437\cdots \ , \\
3^{1.414213562} &= 3^{\frac{1414213562}{1000000000}} = 4.728804385\cdots \ , \\
&\ \ \vdots \qquad .
\end{aligned}$$

このように，指数を $\sqrt{2} = 1.41421356237\cdots$ に近づけていくと，3 の冪は $4.7288043878374\cdots$ に近づいていきます．このことより，$3^{\sqrt{2}} = 4.7288043878374\cdots$ と考えます[4]．

このようにして，任意の正の実数 a と任意の実数 p とに対して a の p 乗 a^p を定義することができます．そして，前述の指数法則も指数が実数である場合にそのまま拡張できます．

定理（実数指数の指数法則）　任意の正の実数 a, b 及び任意の実数 p, q について，

$$a^p a^q = a^{p+q} \ , \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \ , \qquad (a^p)^q = a^{pq} \ ;$$

$$(ab)^p = a^p b^p \ , \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \ .$$

正の数の冪の値はいつも正です．

定理　任意の正の実数 a 及び任意の実数 p について $a^p > 0$ ．

[4] これは大雑把な話です．数学的にはもっと厳密な議論が必要ですが，本書では扱いません．