§8.6　指数の拡張

実数 a 及び自然数 n に対して，a の n 乗 a^n を a の冪または累乗といいました．冪の式 a^n において，n を指数といい，a を底といいます．これまでは冪の指数は自然数の範囲で考えてきましたが，冪の指数を整数の範囲にまで広げます．つまり，実数 a の -3 乗 a^{-3} とか -5 乗 a^{-5} などのような冪を考えます．

冪の指数を整数の範囲に広げても1.2節で述べた指数法則は同じ形で成り立ってほしいと思います．例えば仮に $m=-3$ ，$n=3$ のとき指数法則 $a^m a^n = a^{m+n}$ が成り立つとすると，

$$a^{-3}a^3 = a^{-3+3} = a^0 = 1 \ ,$$

従って $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$ ．そこで，指数が負の整数である冪を次のように定義します．

定義　0 以外の数[3] a 及び正の整数 n に対して，a の $-n$ 乗 a^{-n} を次のように定義する：

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ .$$

例えば次のようになります：

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \ ; \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} \ .$$

例題　次の式を計算して簡単にする：$\left(\dfrac{\sqrt[3]{7}}{5}\right)^{-3}$．

$$\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{\sqrt[3]{7}^{\,3}}{5^3}} = \frac{1}{\frac{7}{125}} = \frac{125}{7} \ .$$

終

問題 8.6.1　次の式を計算して簡単にしなさい：$\left(\dfrac{3}{\sqrt[4]{57}}\right)^{-4}$．

1.2節で述べた指数法則は，冪の指数を整数の範囲にまで拡張してもほぼ同じ形で成り立ちます（その証明は後に回します）．但し，指数が負の整数 n である冪 a^n を考えるときは $a \neq 0$ でなければなりません．

定理（整数指数の指数法則）　0 以外の任意の数 a, b 及び任意の整数 m, n について，

$$a^m a^n = a^{m+n} \ , \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ , \qquad (a^m)^n = a^{mn} \ ;$$
$$(ab)^n = a^n b^n \ , \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ .$$

例題　0 以外の数 a, b に対して次の式を計算して簡単にする：$(ab^2)^3(a^3b)^{-2}$．結果は指数が正の数の a や b の冪の式かまたは a や b そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す．

指数法則を用いて計算する．

$$\begin{aligned}(ab^2)^3(a^3b)^{-2} &= a^3(b^2)^3(a^3)^{-2}b^{-2} = a^3b^6a^{-6}b^{-2} = a^3a^{-6}b^6b^{-2} = a^{-3}b^4 \\ &= \frac{b^4}{a^3} \ .\end{aligned}$$

終

問題 8.6.2　0 以外の数 a, b に対して次の式を計算して簡単にしなさい：$(a^2b^3)^2(a^3b)^{-3}$．結果は指数が正の数の a や b の冪の式かまたは a や b そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表しなさい．

例題　0 以外の数 x, y に対して次の式を計算して簡単にする：$\left(\dfrac{x^4}{y}\right)^2(x^2y)^{-3}$．結果は指数が正の数の x や y の冪の式かまたは x や y そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す．

指数法則を用いて計算する．

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^4}{y}\right)^2(x^2y)^{-3} &= \frac{(x^4)^2}{y^2}(x^2)^{-3}y^{-3} = \frac{x^8}{y^2}x^{-6}y^{-3} = x^8x^{-6}\,\frac{y^{-3}}{y^2} = x^2y^{-5} \\ &= \frac{x^2}{y^5} \ .\end{aligned}$$

終

問題 8.6.3　0 以外の数 x, y に対して次の式を計算して簡単にしなさい：$\left(\dfrac{y^3}{x}\right)^4(xy^2)^{-3}$．結果は指数が正の数の x や y の冪の式かまたは x や y そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表しなさい．

例題　0 以外の数 r, s に対して次の式を計算して簡単にする：$r^4s^2\left(\dfrac{r^2}{s}\right)^{-3}$．結果は指数が正の数の r や s の冪の式かまたは r や s そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す．

指数法則を用いて計算する．

$$\begin{aligned}r^4s^2\left(\frac{r^2}{s}\right)^{-3} &= r^4s^2\,\frac{(r^2)^{-3}}{s^{-3}} = r^4s^2\,\frac{r^{-6}}{s^{-3}} = r^4r^{-6}\,\frac{s^2}{s^{-3}} = r^{-2}s^5 \\ &= \frac{s^5}{r^2} \ .\end{aligned}$$

終

問題 8.6.4　0 以外の数 r, s に対して次の式を計算して簡単にしなさい：$r^4s\left(\dfrac{r^3}{s^2}\right)^{-2}$．結果は指数が正の数の r や s の冪の式かまたは r や s そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表しなさい．

――――　指数法則の証明

a と b とは 0 以外の任意の実数であり，m と n とは任意の整数であるとします．1.2節で述べた自然数指数の指数法則を用いて，整数指数の指数法則 $a^nb^n = (ab)^n$ ，$a^m a^n = a^{m+n}$ を証明します．

まず $a^nb^n = (ab)^n$ を証明します．

証明　$n \geq 0$ のときと $n < 0$ のときとに分ける．$n \geq 0$ のとき，n は自然数なので，自然数指数の指数法則より

$$a^nb^n = (ab)^n \ .$$

$n < 0$ のとき，$l = -n$ とおく；l は自然数なので，自然数指数の指数法則より $a^lb^l = (ab)^l$ ，また $n = -l$ なので，

$$a^nb^n = a^{-l}b^{-l} = \frac{1}{a^l}\frac{1}{b^l} = \frac{1}{a^lb^l} = \frac{1}{(ab)^l} = (ab)^{-l} = (ab)^n \ .$$

故に，$n \geq 0$ のときも $n < 0$ のときも $a^nb^n = (ab)^n$ ．　（証明終り）

補助定理を一つ準備します．

補助定理　0 以外の実数 a 及び自然数 m, n に対して，$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ．

証明　$m \geq n$ のときと $m < n$ のときに分けて扱う．

$m \geq n$ のとき，自然数指数の指数法則より $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ．

$m < n$ のときを考える．$n - m > 0$ なので，自然数指数の指数法則より

$$a^n = a^{(n-m)+m} = a^{n-m}a^m \ ,$$

従って

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{n-m}a^m} = \frac{1}{a^{n-m}} \ .$$

また，$n - m > 0$ なので，指数が負の整数である冪の定義より

$$a^{m-n} = a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{n-m}} \ .$$

故に $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ．

結局，$m \geq n$ のときも $m < n$ のときも $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ．　（証明終り）

この補助定理を用いて $a^m a^n = a^{m+n}$ を証明します．

証明　$m \geq 0$ ，$n \geq 0$ のとき，m と n とは自然数なので，自然数指数の指数法則より

$$a^m a^n = a^{m+n} \ .$$

$m \geq 0$ ，$n < 0$ のとき，$l = -n$ とおく；m と l とは自然数なので補助定理より $\dfrac{a^m}{a^l} = a^{m-l}$ ，また $n = -l$ なので，

$$a^m a^n = a^m a^{-l} = a^m\frac{1}{a^l} = \frac{a^m}{a^l} = a^{m-l} = a^{m+(-l)} = a^{m+n} \ .$$

$m < 0$ ，$n \geq 0$ のとき，$k = -m$ とおく；k と n とは自然数なので補助定理より $\dfrac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$ ，また $m = -k$ なので，

$$a^m a^n = a^{-k}a^n = \frac{1}{a^k}a^n = \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} = a^{-k+n} = a^{m+n} \ .$$

$m < 0$ ，$n < 0$ のとき，$k = -m$ ，$n = -l$ とおく；k と l とは自然数なので，自然数指数の指数法則より $a^ka^l = a^{k+l}$ ，また $m = -k$ ，$n = -l$ なので，

$$a^m a^n = a^{-k}a^{-l} = \frac{1}{a^k}\frac{1}{a^l} = \frac{1}{a^ka^l} = \frac{1}{a^{k+l}} = a^{-(k+l)} = a^{-k+(-l)} = a^{m+n} \ .$$

故に，整数 m と n との符号が何であっても $a^m a^n = a^{m+n}$ ．　（証明終り）

---

[3] 例えば，$0^2 = 0$ なので 0^{-2} の値を $\dfrac{1}{0^2}$ の値として定義できません．一般に，整数 n について $n < 0$ のとき 0^n の値は定義されません．