

§ 8.4 冪関数

実数 a 及び自然数 n に対し、 a の n 個の積を a の n 乗といい、 a^n と書き表しました：

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個の積}} ;$$

特に、 $n=0$ のとき¹⁾ は $a^0 = 1$ と約束しました (1.2節参照)． $a^0, a^1, a^2, a^3, \dots$ など、数 a を何個か (0 個以上) 掛け合わせた積を a の**冪** (power) といいます．冪を表す式 a^n において、 a を**底**²⁾ (base) といい、 n を**指数** (exponent) といいます．

変数 x の冪 $x^1, x^2, x^3, x^4, \dots$ は x の関数です．これらの関数を**冪関数** (power function) といいます．一般に、定数 n が正の整数のとき、実数 x に x の冪 x^n を対応させる関数を、指数が n である冪関数といいます．

定理 8.4 正の整数 n 及び任意の実数 x について、

$$n \text{ が奇数のとき } (-x)^n = -x^n, \quad n \text{ が偶数のとき } (-x)^n = x^n .$$

証明 定理 1.3 より $(-x)^2 = x^2$ ． n が偶数のとき、 $n = 2m$ (m はある自然数) となるので、自然数指数の指数法則より、

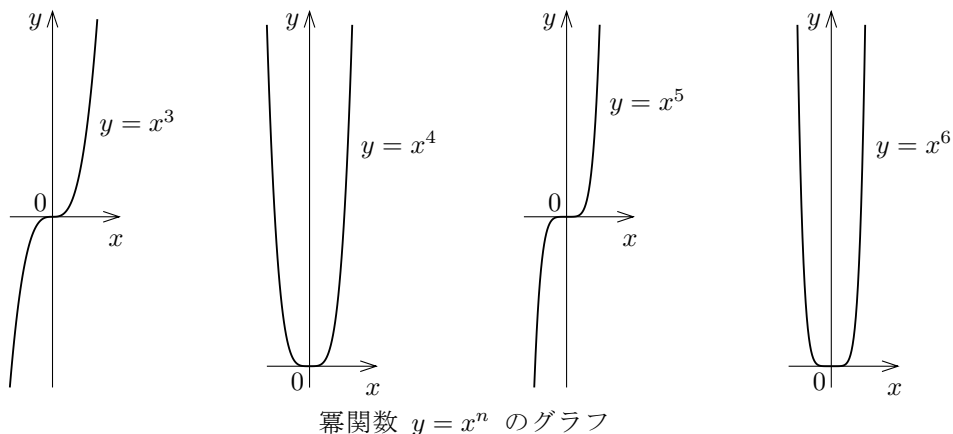
$$\begin{aligned} (-x)^n &= (-x)^{2m} = \{(-x)^2\}^m = (x^2)^m = x^{2m} \\ &= x^n . \end{aligned}$$

n が奇数のとき、 $n = 2m + 1$ (m はある自然数) となるので、自然数指数の指数法則より、

$$\begin{aligned} (-x)^n &= (-x)^{2m+1} = (-x)^{2m} \cdot (-x) = -\{(-x)^2\}^m x \\ &= -(x^2)^m x = -x^{2m} x = -x^{2m+1} \\ &= -x^n . \end{aligned}$$

(証明終り)

この定理より、正の整数 n を指数とする冪関数 x^n は、 n が奇数のとき奇関数で、 n が偶数のとき偶関数です． xy 座標平面において、奇関数のグラフは原点に関して対称で、偶関数のグラフは y 軸に関して対称でした (定理 7.8.2) ．従って、正の整数 n を指数とする冪関数 $y = x^n$ のグラフは、 n が奇数のとき原点に関して対称で、 n が偶数のとき y 軸に関して対称です．



1) 本書では 0 も自然数に入れました．

2) ‘てい’ といいます．