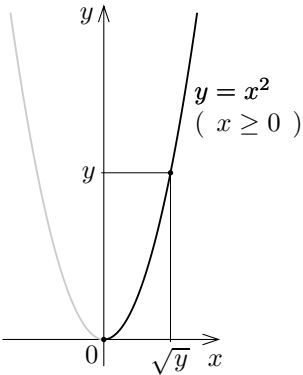


§8.1 平方の逆関数

関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つであるとき、 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応が f の逆関数です。

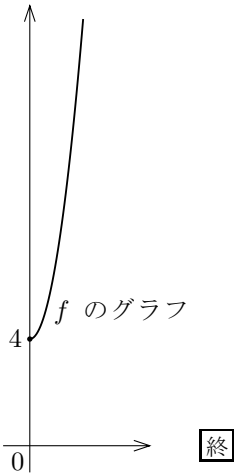
関数 x^2 の逆関数を考えます。実数 x, y について $y=x^2$ とします。 $x^2 \geq 0$ なので $y \geq 0$ 。 $x = \pm\sqrt{y}$ なので、 y に対する x が唯一つとは限りません。しかし、 $x \geq 0$ とすると、 $y \geq 0$ である実数 y に対して $y=x^2$ である実数 x は $x=\sqrt{y}$ と唯一つに定まります。故に、関数 x^2 の定義域を定義域を区間 $[0,\infty)$ に制限すると、関数 $\sqrt{y}$ というより関数 $\sqrt{x}$ が逆関数になります。つまり、定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 x^2 の逆関数は、定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 $\sqrt{x}$ です。



2次関数の逆関数を調べます。

【例題】 定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 f を $f(x)=3x^2+4$ と定める。この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる。

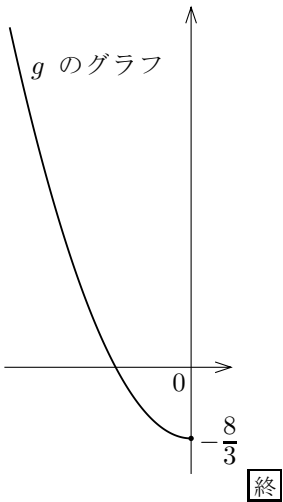
【解説】 関数 f の値域は区間 $[4,\infty)$ 。この区間 $[4,\infty)$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 y を求める。 $f(y)=x$ つまり $3y^2+4=x$ より、 $3y^2=x-4$, $y^2=\frac{x-4}{3}$, $y=\pm\sqrt{\frac{x-4}{3}}$; y は区間 $[0,\infty)$ に属するので $y \geq 0$, よって $y=\sqrt{\frac{x-4}{3}}$ 。このように、区間 $[4,\infty)$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 y が唯一つ定まり、 $y=\sqrt{\frac{x-4}{3}}$ 。故に、関数 f の逆関数 f^{-1} があり、 f^{-1} の定義域は区間 $[4,\infty)$ であり、 $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x-4}{3}}$ 。



【問題 8.1.1】 定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 f を $f(x)=5x^2-7$ と定めます。この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べなさい。

【例解】 定義域が区間 $(-\infty,0]$ である関数 g を $g(x)=\frac{x^2-8}{3}$ と定める。この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる。

【解説】 関数 g の値域は区間 $[-\frac{8}{3},\infty)$ 。この区間 $[-\frac{8}{3},\infty)$ の各実数 x に対して $g(y)=x$ となる区間 $(-\infty,0]$ の実数 y を求める。 $g(y)=x$ つまり $\frac{y^2-8}{3}=x$ なので、 $y^2-8=3x$, $y^2=3x+8$, $y=\pm\sqrt{3x+8}$; y は区間 $(-\infty,0]$ に属するので $y \leq 0$, よって $y=-\sqrt{3x+8}$ 。このように、区間 $[-\frac{8}{3},\infty)$ の各実数 x に対して $g(y)=x$ となる区間 $(-\infty,0]$ の実数 y が唯一つ定まり、 $y=-\sqrt{3x+8}$ 。故に、関数 g の逆関数 g^{-1} があり、 g^{-1} の定義域は区間 $[-\frac{8}{3},\infty)$ であり、 $g^{-1}(x)=-\sqrt{3x+8}$ 。



【問題 8.1.2】 定義域が区間 $(-\infty,0]$ である関数 g を $g(x)=\frac{x^2+5}{2}$ と定めます。この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べなさい。