

§ 7.8 関数のグラフの座標軸及び原点に関する対称移動

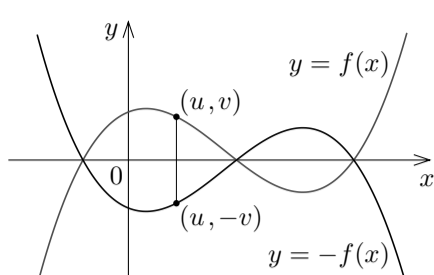
xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = -f(x)$ のグラフを考えます。実数 u, v について、

点 $(u, -v)$ が関数 $y = -f(x)$ のグラフに属す

$$\iff -v = -f(u) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す .

$y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフに属す各点 (u, v) に対する点 $(u, -v)$ の全体です。点 $(u, -v)$ は点 (u, v) と x 軸に関して対称です。よって $y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称です。



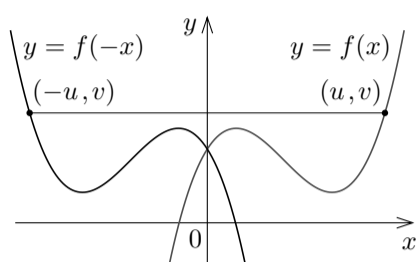
xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = f(-x)$ のグラフを考えます。実数 u, v について、

点 $(-u, v)$ が関数 $y = f(-x)$ のグラフに属す

$$\iff v = f(-(-u)) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す .

$y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフに属す各点 (u, v) に対する点 $(-u, v)$ の全体です。点 $(-u, v)$ は点 (u, v) と y 軸に関して対称です。よって $y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称です。



xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = -f(-x)$ のグラフを考えます。実数 u, v について、

点 $(-u, -v)$ が関数 $y = -f(-x)$ のグラフに属す

$$\iff -v = -f(-(-u)) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す .

$y = -f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$

のグラフに属す各点 (u, v) 対

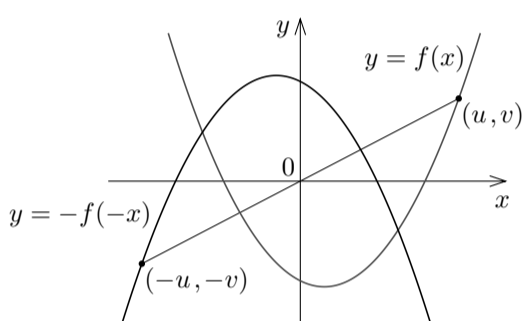
する点 $(-u, -v)$ の全体です。点

$(-u, -v)$ は点 (u, v) と原点に関し

て対称です。よって $y = -f(-x)$

のグラフは $y = f(x)$ のグラフと

原点に関して対称です。



定理 7.8.1 関数 f について以下のことが成り立つ。

(1) xy 座標平面において、 $y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である。

(2) xy 座標平面において、 $y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である。

(3) xy 座標平面において、 $y = -f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと原点に関して対称である。

関数 f が**偶関数** (even function) であるとは、

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について } f(-x) = f(x)$$

となることです。また、関数 f が**奇関数** (odd function) であるとは、

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について } f(-x) = -f(x)$$

となることです。

例 定義域が実数全体である関数 x^2 を f とおきます： $f(x) = x^2$. 任意の実数 x について

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) .$$

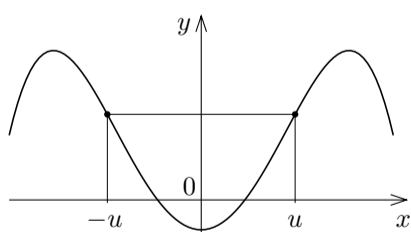
従って、関数 f つまり関数 x^2 は偶関数です。この他、関数 x^4 , 関数 x^6 , 関数 x^8 なども偶関数です。 □

例 定義域が実数全体である関数 x^3 を g とおきます： $g(x) = x^3$. 任意の実数 x について、

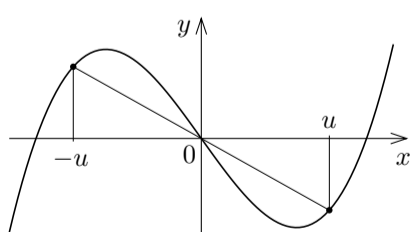
$$g(-x) = (-x)^3 = -x \cdot (-x)^2 = -x \cdot x^2 = -x^3 = -g(x) .$$

従って、関数 g つまり関数 x^3 は奇関数です。この他、関数 x^5 , 関数 x^7 , 関数 x^9 なども奇関数です。 □

偶関数・奇関数のグラフは例えば次のようになります。



偶関数のグラフの例



奇関数のグラフの例

次の定理が成り立ちます。

定理 7.8.2 xy 座標平面において、偶関数のグラフは y 軸に関して対称であり、奇関数のグラフは原点に関して対称である。

証明 関数 f が偶関数であるとする： f の定義域の任意の点 x について $f(-x) = f(x)$. xy 座標平面において、 $y = f(x)$ のグラフと $y = f(-x)$ のグラフとは一致する。定理 7.8.1 より、 $y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称なので、 $y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である。

関数 f が奇関数であるとする： f の定義域の任意の点 x について $f(-x) = -f(x)$ よって $f(x) = -f(-x)$. xy 座標平面において、 $y = f(x)$ のグラフと $y = -f(-x)$ のグラフとは一致する。定理 7.8.1 より、 $y = -f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと原点に関して対称なので、 $y = f(x)$ のグラフは原点に関して対称である。

(証明終り)