

§ 7.7 逆関数のグラフ

例解 定義域が集合 $\{1, 2, 3\}$ である関数 f を次のように定めます：

$$f(1) = 5, \quad f(2) = 7, \quad f(3) = 9.$$

f の逆関数 f^{-1} は次のようになります：

$$f^{-1}(5) = f^{-1}(f(1)) = 1, \quad f^{-1}(7) = f^{-1}(f(2)) = 2, \quad f^{-1}(9) = f^{-1}(f(3)) = 3.$$

グラフは次のようになります：

f のグラフは集合 $\{(1, 5), (2, 7), (3, 9)\}$ であり、
 f^{-1} のグラフは集合 $\{(5, 1), (7, 2), (9, 3)\}$ である。

終

このように、関数 f のグラフの点と対応する逆関数 f^{-1} のグラフの点とでは成分が入れ替わります。

問題 7.7 定義域が集合 $\{1, 3, 5\}$ である関数 f を次のように定めます：

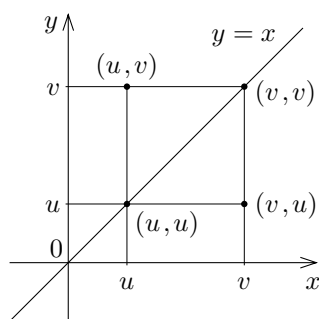
$$f(1) = 4, \quad f(3) = 6, \quad f(5) = 8.$$

f の逆関数 f^{-1} のグラフを求めなさい。

補助定理 任意の実数 u, v について、 xy 座標平面において点 (u, v) と点 (v, u) とは直線 $y = x$ に関して対称である。

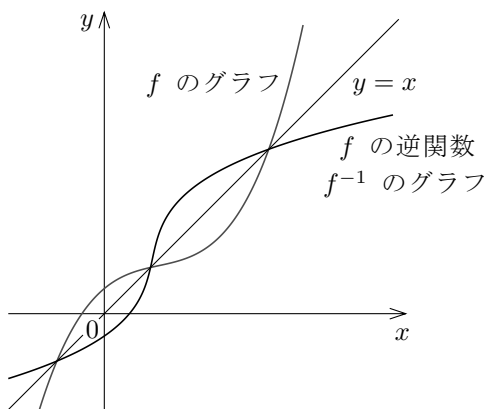
証明 $u \neq v$ のとき、 xy 座標平面において点 (u, u) と (u, v) と (v, v) と (v, u) とは正方形の頂点であり、正方形の頂点 (u, u) と (v, v) とを結ぶ対角線は直線 $y = x$ に含まれる。よって点 (u, v) と点 (v, u) とは直線 $y = x$ に関して対称である。

$u = v$ のとき、 $(u, v) = (v, u)$ で、この点は xy 座標平面において直線 $y = x$ に属す。よって点 (u, v) と点 (v, u) とは直線 $y = x$ に関して対称である。



(証明終り)

関数 f のグラフの点と対応する逆関数 f^{-1} のグラフの点とでは成分が入れ替わります。 xy 座標平面において、関数 f のグラフの点と対応する逆関数 f^{-1} のグラフの点とでは x 座標と y 座標とが入れ替わります。 x 座標と y 座標とが入れ替わった点は元の点と直線 $y = x$ に関して対称です。従って、 f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y = x$ に関して対称です。



定理 7.7 xy 座標平面において、関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である。

証明 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする。 u を f の定義域の実数とし、 v を f の値域の実数とする。定理 7.6.1 より

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u;$$

従って、

$$\begin{aligned} \text{点 } (u, v) \text{ が } f \text{ のグラフに属す} &\iff f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u \\ &\iff \text{点 } (v, u) \text{ が } f^{-1} \text{ のグラフに属す。} \end{aligned}$$

上述の補助定理より、点 (u, v) と点 (v, u) とは直線 $y = x$ に関して対称である。従って f のグラフと f^{-1} のグラフとは直線 $y = x$ に関して対称である。

(証明終り)