§7.6　逆関数

関数 f の定義域の要素を表す変数 x 及び f の値域の要素を表す変数 y について $y=f(x)$ とします． f によって，x の値に対して y の値が唯一つ定まります． 逆に，y の値に対して x の値が唯一つ定まるとき，y の値に対して x の値を定める関数ができます． この関数を f の**逆関数** (inverse function) といいます．

定義　関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つであるとき，関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応を f の逆関数といい，f^{-1} と書き表す． 関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域である．

例　定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 f を次のように定めます：

$$f(3)=8\ ,\quad f(5)=2\ ,\quad f(9)=6\ .$$

f の値域は集合 $\{2,6,8\}$ です． $f(x)=2$ となる数 x は 5 だけです． $f(x)=6$ となる数 x は 9 だけです． $f(x)=8$ となる数 x は 3 だけです． このように，f の値域 $\{2,6,8\}$ の各要素 y に対して $f(x)=y$ となる f の定義域の要素 x が唯一つ定まります． よって f の逆関数 f^{-1} があります． f^{-1} の定義域は $\{2,6,8\}$ であり，

$$f^{-1}(2)=5\ ,\quad f^{-1}(6)=9\ ,\quad f^{-1}(8)=3\ .$$

終

問題 7.6.1　定義域が集合 $\{0,4,6\}$ である関数 f を次のように定めます：

$$f(0)=7\ ,\quad f(4)=1\ ,\quad f(6)=5\ .$$

関数 f の逆関数を調べなさい．

例　定義域が区間 $[5,\infty)$ である関数 f を $f(x)=x+4$ と定めます． この関数 f の値域は区間 $[9,\infty)$ です． この区間 $[9,\infty)$ の各実数 y に対して $y=f(x)$ となる区間 $[5,\infty)$ の実数 x を求めます． $y=x+4$ とすると，$x=y-4$ ，$y\geq 9$ なので $x=y-4\geq 5$ ． このように，区間 $[9,\infty)$ の各実数 y に対して $y=f(x)$ となる区間 $[5,\infty)$ の実数 x は $x=y-4$ と唯一つに定まる． 故に，f の逆関数 f^{-1} があり，f^{-1} の定義域である区間 $[9,\infty)$ の各実数 y に対して $f^{-1}(y)=y-4$ ． 通常 f^{-1} についても独立変数を x にします． f の逆関数 f^{-1} の定義域である区間 $[9,\infty)$ の各実数 x に対して $f^{-1}(x)=x-4$ ． 終

例　定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 g を $g(x)=3x$ と定めます． この関数 g の値域は区間 $[6,\infty)$ です． この区間 $[6,\infty)$ の各実数 y に対して $y=g(x)$ となる区間 $[2,\infty)$ の実数 x を求めます． $y=3x$ とすると，$x=\dfrac{y}{3}$ ，$y\geq 6$ なので $x=\dfrac{y}{3}\geq 2$ ． このように，区間 $[6,\infty)$ の各実数 y に対して $y=g(x)$ となる区間 $[2,\infty)$ の実数 x は $x=\dfrac{y}{3}$ と唯一つに定まる． 故に，g の逆関数 g^{-1} があり，g^{-1} の定義域である区間 $[6,\infty)$ の各実数 y について $g^{-1}(y)=\dfrac{y}{3}$ ． 通常 g^{-1} についても独立変数を x にします． g の逆関数 g^{-1} の定義域である区間 $[6,\infty)$ の各実数 x について $g^{-1}(x)=\dfrac{x}{3}$ ． 終

大雑把にいうと，関数 $x+4$ の逆関数は関数 $x-4$ で，関数 $3x$ の逆関数は関数 $\dfrac{x}{3}$ です． このように，関数 f の逆関数とは，f の計算と逆の計算をする関数です．

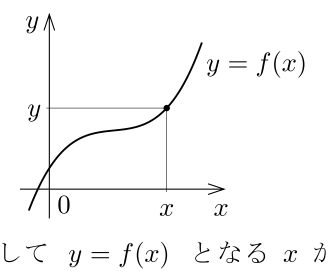
例題　定義域が区間 $[0,3]$ である関数 f を $f(x)=2x+3$ と定める． f の逆関数を調べる．

〔注意〕 f^{-1} の定義域つまり f の値域の要素を表す変数を初めから x にしてみる．

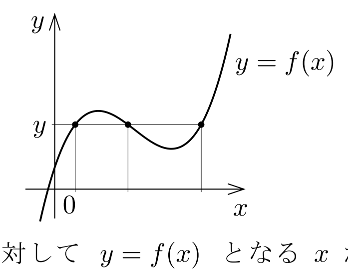
〔解答〕 f の値域は区間 $[3,9]$ である． この区間 $[3,9]$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,3]$ の実数 y を求める． $2y+3=x$ とすると，$2y=x-3$ ，$y=\dfrac{x-3}{2}$ ；また $3\leq x\leq 9$ なので $0\leq y\leq 3$ ． 区間 $[3,9]$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,3]$ の実数 y が唯一つ定まる． 故に，f の逆関数 f^{-1} があり，f^{-1} の定義域である区間 $[3,9]$ の各実数 x に対して $f^{-1}(x)=\dfrac{x-3}{2}$ ． 終

問題 7.6.2　定義域が区間 $[2,4]$ である関数 g を $g(x)=13-3x$ と定めます． g の逆関数を調べなさい．

関数 f の逆関数は，f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定めます． 関数は唯一つの対象を定める対応ですから，f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x が複数あるときは，f の逆関数がありません． xy 座標平面における関数 $y=f(x)$ のグラフを考えると例えば次のようになります．



y に対して $y=f(x)$ となる x が唯一つあるので，関数 f の逆関数がある．



y に対して $y=f(x)$ となる x が 2 個以上あるので，関数 f の逆関数はない．

例　定義域が実数全体である関数 f を $f(x)=x^2$ と定めます． 例えば 7 に対して，$f(x)=7$ とすると，$x^2=7$ なので，$x=\sqrt{7}$ または $x=-\sqrt{7}$ ；このように x の値が唯一つではありません． よって関数 f の逆関数はありません． 終

逆関数について以下の定理が成り立ちます．

定理 7.6.1　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，任意の対象 u と v とについて，

$$f(u)=v\iff f^{-1}(v)=u\ .$$

証明　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする． 対象 u と v とについて，$f(u)=v$ ならば，f の逆関数 f^{-1} は v に対して u を定めるので $f^{-1}(v)=u$ ． 実数 u と v とについて，$f^{-1}(v)=u$ となるのは $f(u)=v$ のときなので，$f^{-1}(v)=u$ ならば $f(u)=v$ ． 故に． 任意の対象 u と v とについて，$f(u)=v$ ならば $f^{-1}(v)=u$ ，かつ，$f^{-1}(v)=u$ ならば $f(u)=v$ ． （証明終り）

定理 7.6.2　関数 f の逆関数 f^{-1} の値域は f の定義域である．

証明　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする． 対象 y について，

$$\begin{aligned}&y\ \text{が}\ f^{-1}\ \text{の値域に属す}\\ \iff\ &y=f^{-1}(x)\ \text{となる}\ f^{-1}\ \text{の定義域の要素}\ x\ \text{がある}\end{aligned}$$

等式 $y=f^{-1}(x)$ は等式 $x=f(y)$ と同値である． また，f^{-1} の定義域は f の定義域である．

$$\begin{aligned}&y=f^{-1}(x)\ \text{となる}\ f^{-1}\ \text{の定義域の要素}\ x\ \text{がある}\\ \iff\ &x=f(y)\ \text{となる}\ f\ \text{の値域の要素}\ x\ \text{がある}\\ \iff\ &y\ \text{は}\ f\ \text{の定義域に属す}\ .\end{aligned}$$

よって

$$y\ \text{が}\ f^{-1}\ \text{の値域に属す}\iff y\ \text{は}\ f\ \text{の定義域に属す}\quad .$$

故に f^{-1} の値域と f の定義域と同じである． （証明終り）

次の定理は重要です．

定理 7.6.3　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f\ \text{の定義域の任意の要素}\ x\ \text{について}\quad f^{-1}\big(f(x)\big)=x\ ,$$

$$f\ \text{の値域の任意の要素}\ y\ \text{について}\quad f\big(f^{-1}(y)\big)=y\ .$$

証明　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする． f の定義域の要素 x について，$y=f(x)$ とおくと，定理 7.6.1 より $x=f^{-1}(y)$ なので，$f^{-1}\big(f(x)\big)=f^{-1}(y)=x$ ． f の値域の要素 y について，$x=f^{-1}(y)$ とおくと，定理 7.6.1 より $y=f(x)$ なので，$f\big(f^{-1}(y)\big)=f(x)=y$ ． （証明終り）

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，f の定義域の要素 x に対して $f^{-1}\big(f(x)\big)=x$ なので，f^{-1} は x における f の値 $f(x)$ を x に戻す関数です．

逆関数について更に以下の定理が成り立ちます．

定理 7.6.4　関数 g の定義域が関数 f の値域であり，f の定義域の各要素 x について $g\big(f(x)\big)=x$ ならば，g は f の逆関数である．

証明　関数 g の定義域が関数 f の値域であり，f の定義域の各要素 x について $g\big(f(x)\big)=x$ とする． f の定義域の各要素 x_1,x_2 及び f の値域の各要素 y について，$f(x_1)=y$ かつ $f(x_2)=y$ ならば，$g\big(f(x_1)\big)=g(y)$ かつ $g\big(f(x_2)\big)=g(y)$ ，$x_1=g(y)$ かつ $x_2=g(y)$ ，よって $x_1=x_2$ ． 関数 f の値域の各要素 y に対して，$y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x は唯一つであり，$g(y)=g\big(f(x)\big)=x$ なので

$$f\big(g(y)\big)=f(x)=y\ .$$

関数 g は，関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ である x を定めるので，f の逆関数である。 （証明終り）

定理 7.6.5　関数 g が関数 f の逆関数であるとき，f は g の逆関数である．

証明　関数 g が関数 f の逆関数であるとする． 定理 7.6.2 より f の定義域は g の値域である． 定理 7.6.3 より，f の定義域の各要素 x について $g\big(f(x)\big)=x$ ． 定理 7.6.4 より g は f の逆関数である． （証明終り）