

§ 7.5 関数の合成

例解 定義域が集合 $\{1, 2, 3\}$ である関数 f を次のように定めます：

$$f(1) = 5, \quad f(2) = 9, \quad f(3) = 7.$$

定義域が集合 $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ である関数 g を次のように定めます：

$$g(5) = 3, \quad g(6) = 1, \quad g(7) = 4, \quad g(8) = 2, \quad g(9) = 0.$$

このとき、次のように、 f の定義域 $\{1, 2, 3\}$ の各要素 x に対して $g(f(x))$ の値が唯一つ定まります：

$$f(1) = 5 \text{ かつ } g(5) = 3 \text{ なので } g(f(1)) = g(5) = 3,$$

$$f(2) = 9 \text{ かつ } g(9) = 0 \text{ なので } g(f(2)) = g(9) = 0,$$

$$f(3) = 7 \text{ かつ } g(7) = 4 \text{ なので } g(f(3)) = g(7) = 4.$$

f の定義域 $\{1, 2, 3\}$ の各要素 x に対して $g(f(x))$ の値を定める関数を f と g との合成関数といいます。この f と g との合成関数の定義域は f の定義域 $\{1, 2, 3\}$ です。 終

一般的に、関数 f の定義域の各要素 x における f の値 $f(x)$ が関数 g の定義域に属すとき、 $f(x)$ における g の値 $g(f(x))$ があるので、 f の定義域の各要素 x に対して $g(f(x))$ を定める対応は関数になります；この関数を f と g との**合成関数** (composite function) といいます。

定義 関数 f の値域が関数 g の定義域に含まれるとき、 f の定義域の各要素 x に $g(f(x))$ を定める関数を f と g との合成関数という。 f と g との合成関数の定義域は f の定義域である。

変数 x の値が g の定義域に属すときに限り $g(x)$ の値があります。ですから、 $f(x)$ の値が g の定義域に属すときに限り $g(f(x))$ の値があります。つまり、 $g(f(x))$ の値があるためには f の値 $f(x)$ が g の定義域に属さなければなりません。故に、合成関数 $g(f(x))$ を考えるには、 f の値の全体つまり f の値域が g の定義域に含まれなければなりません。

問題 7.5.1 定義域が集合 $\{1, 3, 7\}$ である関数 $f(x)$ を次のように定めます：

$$f(1) = 2, \quad f(3) = 6, \quad f(7) = 8.$$

定義域が集合 $\{2, 4, 6, 8\}$ である関数 $g(x)$ を次のように定めます：

$$g(2) = 5, \quad g(4) = 1, \quad g(6) = 0, \quad g(8) = 9.$$

$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ があるならば、関数 $g(f(x))$ について定義域及び定義域の各要素における値を求めなさい。

例題 定義域が区間 $[3, \infty)$ である関数 $f(x)$ を $f(x) = 2x - 1$ と定め、定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 $g(x)$ を $g(x) = x^2 + 4$ と定める。 $f(x)$ の値域は、区間 $[5, \infty)$ なので、 $g(x)$ の定義域の区間 $[0, \infty)$ に含まれる；よって $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ がある。この合成関数 $g(f(x))$ を求める。また、 $g(x)$ の値域は、区間 $[4, \infty)$ なので、 $f(x)$ の定義域の区間 $[3, \infty)$ に含まれる；よって $g(x)$ と $f(x)$ との合成関数 $f(g(x))$ がある。この合成関数 $f(g(x))$ を求める。

【解答】 合成関数 $g(f(x))$ の定義域は、関数 $f(x)$ の定義域なので、区間 $[3, \infty)$ である。この区間 $[3, \infty)$ の各実数 x について、

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(2x - 1) = (2x - 1)^2 + 4 = 4x^2 - 4x + 1 + 4 \\ &= 4x^2 - 4x + 5. \end{aligned}$$

合成関数 $f(g(x))$ の定義域は、関数 $g(x)$ の定義域なので、区間 $[0, \infty)$ である。この区間 $[0, \infty)$ の各実数 x について、

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x^2 + 4) = 2(x^2 + 4) - 1 = 2x^2 + 8 - 1 \\ &= 2x^2 + 7. \end{aligned}$$

終

問題 7.5.2 定義域が区間 $[2, \infty)$ である関数 $f(x)$ を $f(x) = 3x - 2$ と定め、定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 $g(x)$ を $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 5$ と定めます。

(1) 関数 $f(x)$ の値域は、区間 $[4, \infty)$ なので、関数 $g(x)$ の定義域の区間 $[0, \infty)$ に含まれます。よって $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ ができます。この合成関数 $g(f(x))$ を求めなさい。

(2) 関数 $g(x)$ の値域は、区間 $[5, \infty)$ なので、関数 $f(x)$ の定義域の区間 $[4, \infty)$ に含まれます。よって $g(x)$ と $f(x)$ との合成関数 $f(g(x))$ ができます。この合成関数 $f(g(x))$ を求めなさい。