

第6章の補遺2 ヘロンの公式

次に述べるヘロン³⁾の公式は、三角形の3辺の長さからその三角形の面積を求めるための公式です。

定理 (ヘロンの公式) 三角形の各辺の長さが各々 a, b, c であるとき、 $s = \frac{a+b+c}{2}$ とおくと、この三角形の面積 S は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} .$$

証明 3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC に
おいて、

$$\angle A = A, \quad \overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \overline{AB} = c$$

とする。 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ なので、

$$(\cos A)^2 = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2bc)^2} .$$

$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$ なので、

$$\begin{aligned} (\sin A)^2 &= 1 - (\cos A)^2 = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2bc)^2} = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2bc)^2} \\ &= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)\{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)\}}{(2bc)^2} \\ &= \frac{(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)\{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)\}}{(2bc)^2} \\ &= \frac{\{(b+c)^2 - a^2\}\{a^2 - (b-c)^2\}}{(2bc)^2} \\ &= \frac{\{(b+c+a)(b+c-a)\}\{(a+b-c)(a-b+c)\}}{(2bc)^2} \\ &= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(2bc)^2} . \end{aligned}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より $\sin A > 0$ なので、

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(2bc)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{2bc} . \end{aligned}$$

従って、三角形 ABC の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{bc}{2} \sin A = \frac{bc}{2} \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{2bc} \\ &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{4} . \end{aligned}$$

ここで、 $a+b+c = 2s$ より、

$$b+c-a = a+b+c - 2a = 2s - 2a = 2(s-a) ,$$

$$c+a-b = a+b+c - 2b = 2s - 2b = 2(s-b) ,$$

$$a+b-c = a+b+c - 2c = 2s - 2c = 2(s-c) ,$$

故に、三角形 ABC の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)}}{4} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} . \end{aligned}$$

(証明終り)

³⁾ ヘロンは1世紀から2世紀頃の古代ローマ時代の数学者です。