

## §6.8 余弦定理

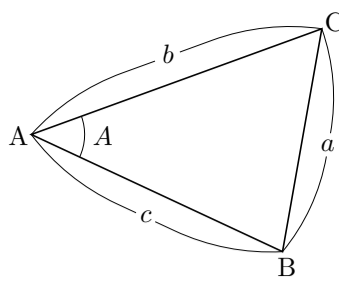
**定理** (余弦定理) 平面上の相異なる3点

$A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  において,

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= c, & \overline{BC} &= a, \\ \overline{CA} &= b, & \angle BAC &= A \end{aligned}$$

とおくと,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$



**証明**  $xy$  座標平面において点  $O, B', C'$  を次のように定める:  $O = (0, 0)$  ;

$B' = (c, 0)$  ; 始線  $Ox$  に対する線分  $OC'$  の角度は  $A$  で,  $\overline{OC'} = b$  . このとき,

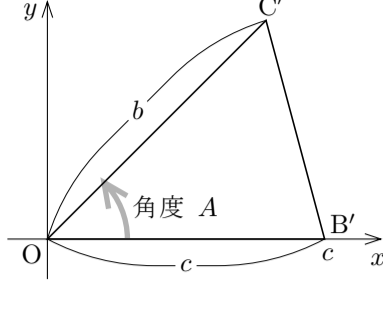
$$\overline{OB'} = c = \overline{AB},$$

$$\overline{OC'} = b = \overline{AC},$$

$$\angle C'OB' = A = \angle BAC.$$

従って三角形  $OB'C'$  と三角形  $ABC$  とは合同である. よって

$$a = \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$



$\overline{OC'} = b$  で, 始線  $Ox$  に対する線分  $OC'$  の角度は  $A$  なので, 定理 6.4.4 より

$$C' = (b \cos A, b \sin A).$$

更に  $B' = (c, 0)$  なので, 定理 6.0 より,

$$\overline{B'C'}^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2 = b^2(\cos A)^2 - 2bc \cos A + c^2 + b^2(\sin A)^2$$

$$= b^2\{(\sin A)^2 + (\cos A)^2\} + c^2 - 2bc \cos A.$$

定理 6.4.2 より  $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$  なので,

$$b^2\{(\sin A)^2 + (\cos A)^2\} + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

よって

$$\overline{B'C'}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$\overline{B'C'} = \overline{BC} = a$  なので,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  . (証明終り)

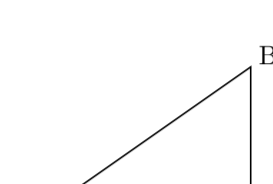
相異なる3点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  において, 余弦定理より,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \cos \angle BAC.$$

ここで, 内角  $BAC$  が直角であるとするとき,

$\angle BAC = 90^\circ$  より  $\cos \angle BAC = \cos 90^\circ = 0$  なるので,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$



これはピタゴラスの定理 (三平方の定理) です.

このように, ピタゴラスの定理は余弦定理の特殊な場合です.

平面上の相異なる3点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  において, 余弦定理より, 例えば  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \sin \angle BAC$  . このように, 余弦定理は三角形の3辺の長さとの間の関係を述べます. ですから, 余弦定理によって次のような計算ができます.

・三角形の2辺の長さとの間の関係から他の辺の長さを求める.

・三角形の3辺の長さから内角の大きさを求める.

**例題** 平面上の相異なる3点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  について,  $\overline{AB} = 3$  かつ  $\overline{BC} = 5$  かつ  $\angle ABC = 120^\circ$  とする. 辺  $AC$  の長さを求める.

$$\cos 120^\circ = \cos(30^\circ + 90^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

余弦定理より

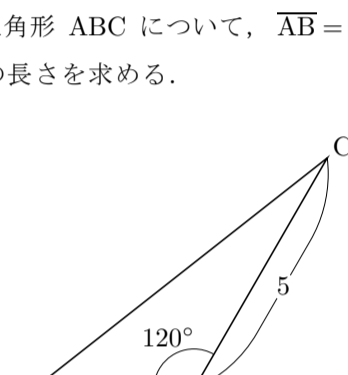
$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC$$

$$= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$$

$$= 9 + 25 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 49.$$

$\overline{AC} \geq 0$  なので  $\overline{AC} = \sqrt{49} = 7$  . 終



**問題 6.8.1** 平面上の相異なる3点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  について,  $\overline{AB} = 4$  かつ  $\overline{AC} = \sqrt{3}$  かつ  $\angle BAC = 30^\circ$  とします. 辺  $BC$  の長さを求めなさい.

**問題 6.8.2** 平面上の相異なる3点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  について,  $\overline{AC} = 5$  かつ  $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$  かつ  $\angle ACB = 150^\circ$  とします. 辺  $AB$  の長さを求めなさい.

**例題** 平面上の相異なる3点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  について,  $\overline{AB} = 1$  かつ  $\overline{AC} = 2$  かつ  $\overline{BC} = \sqrt{7}$  とします. 内角  $BAC$  の大きさを求めなさい.

余弦定理より,

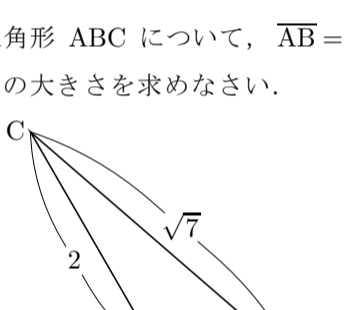
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \cos \angle BAC,$$

$$\sqrt{7}^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos \angle BAC,$$

$$4 \cos \angle BAC = -2,$$

$$\cos \angle BAC = -\frac{1}{2},$$

$0^\circ \leq \angle BAC \leq 180^\circ$  なので  $\angle BAC = 120^\circ$  . 終



**問題 6.8.3** 平面上の相異なる3点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  について,  $\overline{AB} = 3\sqrt{3}$  かつ  $\overline{AC} = 7$  かつ  $\overline{BC} = 2$  とします. 内角  $ABC$  の大きさを求めなさい.

**例題** 平面上の相異なる3点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  について,  $\overline{AB} = 8$  かつ  $\overline{AC} = 7$  かつ  $\angle ABC = 60^\circ$  とする. 辺  $BC$  の長さを求める.

【解説】 余弦定理より

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC.$$

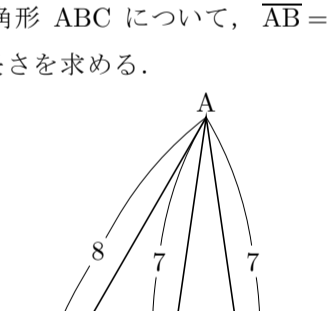
$a = \overline{BC}$  とおくと,

$$49 = a^2 + 64 - 2 \cdot 8 \cdot a \cdot \cos 60^\circ,$$

$$a^2 - 8a + 15 = 0, \quad (a-3)(a-5) = 0, \quad a = 3$$

または  $a = 5$  . つまり  $\overline{BC} = 3$  または

$\overline{BC} = 5$  . どちらの場合もあり得る. 終



**問題 6.8.4** 平面上の相異なる3点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  について,  $\overline{AB} = 5$  かつ  $\overline{BC} = \sqrt{13}$  かつ  $\angle BAC = 45^\circ$  とします. 辺  $AC$  の長さを求めなさい.

**例題** 平面上の相異なる3点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  について,  $\overline{AC} = \sqrt{6}$  かつ  $\overline{BC} = 1 + \sqrt{3}$  かつ  $\angle ACB = 45^\circ$  とする. 内角  $ABC$  の大きさを求める.

余弦定理より

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\overline{BC} \cos \angle ACB$$

$$= \sqrt{6}^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3}) \cos 45^\circ$$

$$= 6 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3}) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 10 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 6$$

$$= 4,$$

よって  $\overline{AB} = \sqrt{4} = 2$  . 余弦定理より  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC$  なので,

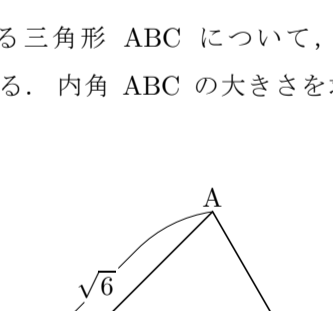
$$\sqrt{6}^2 = 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2(1 + \sqrt{3}) \cos \angle ABC,$$

$$6 = 4 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4(1 + \sqrt{3}) \cos \angle ABC,$$

$$4(1 + \sqrt{3}) \cos \angle ABC = 2 + 2\sqrt{3},$$

$$\cos \angle ABC = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2},$$

よって  $\angle ABC = 60^\circ$  . 終



**問題 6.8.5** 平面上の相異なる3点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  について,  $\overline{AC} = 2$  かつ  $\overline{BC} = \sqrt{3} - 1$  かつ  $\angle ACB = 120^\circ$  とします. 内角  $ABC$  の大きさを求めなさい.

**例題** 平面上の相異なる3点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  について,  $\overline{AB} = 4$  かつ  $\overline{AC} = 5$  かつ  $\overline{BC} = 7$  とする. 内角  $BAC$  の大きさ  $\angle BAC$  の余弦  $\cos \angle BAC$  を求め, 内角  $BAC$  の大きさ  $\angle BAC$  の正弦  $\sin \angle BAC$  を求め, 三角形  $ABC$  の面積を求め.

【解説】 余弦定理より  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \cos \angle BAC$  なので,

$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos \angle BAC,$$

$$40 \cos \angle BAC = 8,$$

$$\cos \angle BAC = \frac{1}{5}.$$

$(\sin \angle BAC)^2 + (\cos \angle BAC)^2 = 1$  なので,

$$(\sin \angle BAC)^2 = 1 - (\cos \angle BAC)^2 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}.$$

$0^\circ \leq \angle BAC \leq 180^\circ$  なので  $\sin \angle BAC \geq 0$  , よって

$$\sin \angle BAC = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

三角形  $ABC$  の面積は

$$\frac{1}{2} \overline{AB}\overline{AC} \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6} . \quad \text{終}$$

**問題 6.8.6** 平面上の相異なる3点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  において,  $\overline{AB} = 4$  かつ  $\overline{AC} = 7$  かつ  $\overline{BC} = 9$  とします.

(1) 内角  $BAC$  の大きさ  $\angle BAC$  の余弦  $\cos \angle BAC$  を求めなさい.

(2) 内角  $BAC$  の大きさ  $\angle BAC$  の正弦  $\sin \angle BAC$  を求めなさい.

(3) 三角形  $ABC$  の面積を求めなさい.