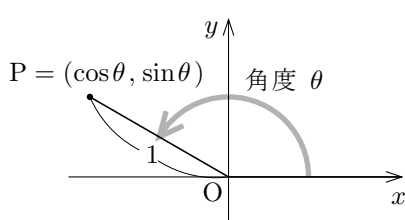


§6.6 加法定理の証明

定理 6.4.4 から次のことが分かります：点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について、 $\overline{OP} = 1$ で線分 OP の始線 Ox に対する角度が θ であるとき、 $P = (\cos\theta, \sin\theta)$. このことを用いてまず余弦の加法定理を証明します。



定理 (余弦の加法定理) 任意の一般角 α と β について

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \quad (\text{複号同順}) .$$

証明 点 O を原点とする xy 座標平面において、3点 A, B, C を次のように定める：

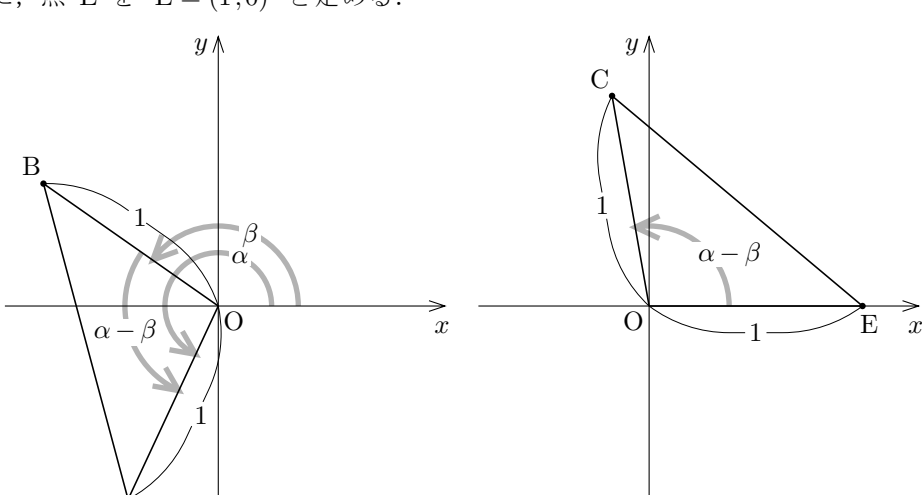
$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 1$ で、

線分 OA は 始線 Ox に対する角度 α の線分、

線分 OB は 始線 Ox に対する角度 β の線分、

線分 OC は 始線 Ox に対する角度 $(\alpha - \beta)$ の線分。

更に、点 E を $E = (1, 0)$ と定める。



定理 6.4.4 より次のことが成り立つ：

$$A = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad B = (\cos\beta, \sin\beta), \quad C = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)) .$$

線分 OB と線分 OA , 及び線分 OE と線分 OC との位置関係は次のようになる：

点 O を中心に線分 OB を $(\alpha - \beta)$ の角度だけ回転させた線分が OA であり、

点 O を中心に線分 OE を $(\alpha - \beta)$ の角度だけ回転させた線分が OC である。

従って角 AOB と角 COE とは同じ大きさである。更に $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OE}$ なので、三角形 AOB と三角形 COE とは合同である。よって $\overline{AB} = \overline{CE}$ なので、

$$\overline{AB}^2 = \overline{CE}^2 .$$

$A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B = (\cos\beta, \sin\beta)$ なので、定理 6.0 より、

$$\overline{AB}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 .$$

この等式の右辺を計算する。 $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$, $(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1$ なので、

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \\ &= (\cos\alpha)^2 - 2\cos\alpha \cos\beta + (\cos\beta)^2 + (\sin\alpha)^2 - 2\sin\alpha \sin\beta + (\sin\beta)^2 \\ &= (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2 - 2\cos\alpha \cos\beta - 2\sin\alpha \sin\beta \\ &= 2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) . \end{aligned}$$

$C = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$, $E = (1, 0)$ なので、定理 6.0 より、

$$\overline{CE}^2 = \{\cos(\alpha - \beta) - 1\}^2 + \{\sin(\alpha - \beta)\}^2 .$$

この等式の右辺を計算する。 $\{\sin(\alpha - \beta)\}^2 + \{\cos(\alpha - \beta)\}^2 = 1$ なので、

$$\begin{aligned} \overline{CE}^2 &= \{\cos(\alpha - \beta) - 1\}^2 + \{\sin(\alpha - \beta)\}^2 \\ &= \{\cos(\alpha - \beta)\}^2 - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \{\sin(\alpha - \beta)\}^2 \\ &= 1 + \{\sin(\alpha - \beta)\}^2 + \{\cos(\alpha - \beta)\}^2 - 2\cos(\alpha - \beta) \\ &= 2 - 2\cos(\alpha - \beta) . \end{aligned}$$

$\overline{CE}^2 = \overline{AB}^2$ なので、

$$\begin{aligned} 2 - 2\cos(\alpha - \beta) &= 2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) , \\ -2\cos(\alpha - \beta) &= -2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) , \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta . \end{aligned}$$

また、この式において β を $-\beta$ におきかえると

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta) ,$$

定理 6.4.3 より $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ なので、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta .$$

(証明終り)

定理 6.5 任意の一般角 θ について、 $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$, $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$.

証明 余弦の加法定理より

$$\cos(\theta + 90^\circ) = \cos\theta \cos 90^\circ - \sin\theta \sin 90^\circ .$$

$\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$ なので

$$\cos\theta \cos 90^\circ - \sin\theta \sin 90^\circ = -\sin\theta ,$$

従って $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$. 更に、この等式において θ を $-(\theta + 90^\circ)$ でおき替える：

$$\cos\{-(\theta + 90^\circ) + 90^\circ\} = -\sin\{-(\theta + 90^\circ)\} .$$

この等式の左辺は、定理 6.4.3 より、

$$\cos\{-(\theta + 90^\circ) + 90^\circ\} = \cos(-\theta - 90^\circ + 90^\circ) = \cos(-\theta) = \cos\theta ,$$

右辺は、定理 6.4.3 より、

$$-\sin\{-(\theta + 90^\circ)\} = -\{-\sin(\theta + 90^\circ)\} = \sin(\theta + 90^\circ) .$$

よって $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$.

(証明終り)

定理 (正弦の加法定理) 任意の一般角 α と β について

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \quad (\text{複号同順}) .$$

証明 余弦の加法定理より

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\alpha \cos(\beta + 90^\circ) - \sin\alpha \sin(\beta + 90^\circ) .$$

定理 6.6 より、

$$\begin{aligned} \cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} &= \cos\{(\alpha + \beta) + 90^\circ\} = -\sin(\alpha + \beta) , \\ \cos(\beta + 90^\circ) &= -\sin\beta , \quad \sin(\beta + 90^\circ) = \cos\beta , \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} -\sin(\alpha + \beta) &= \cos\alpha(-\sin\beta) - \sin\alpha \cos\beta , \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta . \end{aligned}$$

また、この式において β を $-\beta$ におき替えると

$$\sin\{\alpha + (-\beta)\} = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) .$$

定理 6.4.3 より $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ なので、

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta .$$

(証明終り)

定理 (正接の加法定理) 任意の一般角 α と β について、 $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 及び、 $\tan(\alpha + \beta)$ または $\tan(\alpha - \beta)$ の値があるとき、

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta} \quad (\text{複号同順}) .$$

証明 正弦及び余弦の加法定理より、

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta} \\ &= \frac{\frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} \\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} . \end{aligned}$$

同様にして等式 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$ も導かれる。

(証明終り)