

§ 6.4 三角比の性質

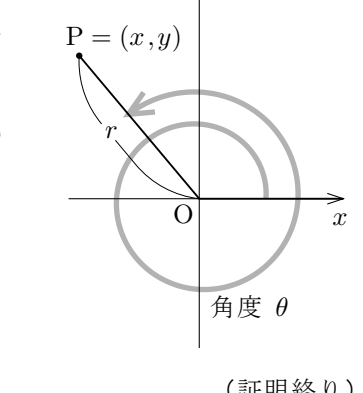
定理 6.4.1

任意の一般角 θ について、

$$\theta \text{ が角度 } 90^\circ \text{ の奇数倍でないとき } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ .}$$

証明 xy 座標平面において、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $P = (x, y)$ ($P \neq O$) をとり、 $\overline{OP} = r$ とおく． θ が 90° の奇数倍でないとき、 $x \neq 0$ で、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ の値があり、 $\cos \theta = \frac{x}{r} \neq 0$ で、

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan \theta \text{ .}$$



(証明終り)

定理 6.4.2

任意の一般角 θ について

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 \text{ .}$$

証明 xy 座標平面において、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $P = (x, y)$ ($P \neq O$) をとる．

$O = (0, 0)$ なので、定理 6.0 より、

$$\overline{OP}^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = x^2 + y^2 \text{ .}$$

$\overline{OP} = r$ とおく． $\overline{OP}^2 = r^2$ なので、

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ .}$$

定義より $\cos \theta = \frac{x}{r}$, $\sin \theta = \frac{y}{r}$ なので、

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1 \text{ ,}$$

つまり $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$.

(証明終り)

【例題】 一般角 θ について $\sin \theta = \frac{5}{7}$ かつ $\cos \theta \geq 0$ とする． $\cos \theta$ 及び $\tan \theta$ の値を求める．

【解説】 定理 6.4.2 より $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$. $\sin \theta = \frac{5}{7}$ なので、

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 \text{ ,}$$

$$(\cos \theta)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49} \text{ ,}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{24}{49}} = \pm \frac{\sqrt{24}}{7} \text{ ,}$$

$\cos \theta \geq 0$ なので $\cos \theta = \frac{\sqrt{24}}{7}$. 更に、定理 6.4.1 より、

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{\sqrt{24}}{7}} = \frac{5}{\sqrt{24}} \text{ .}$$

【終

【問題 6.4.1】 一般角 θ について $\sin \theta = \frac{4}{5}$ かつ $\cos \theta \leq 0$ とします． $\cos \theta$ 及び $\tan \theta$ の値を求めなさい．

【問題 6.4.2】 一般角 θ について $\cos \theta = \frac{1}{3}$ かつ $\sin \theta \geq 0$ とします． $\sin \theta$ 及び $\tan \theta$ の値を求めなさい．

定理 6.4.3

任意の一般角 θ について、

$$\theta \text{ が角度 } 90^\circ \text{ の奇数倍でないとき } 1 + (\tan \theta)^2 = \frac{1}{(\cos \theta)^2} \text{ .}$$

証明 一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする．このとき $\cos \theta \neq 0$. 定理 6.4.2 より $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$. 両辺を $(\cos \theta)^2$ で割ると、

$$\frac{(\sin \theta)^2}{(\cos \theta)^2} + \frac{(\cos \theta)^2}{(\cos \theta)^2} = \frac{1}{(\cos \theta)^2} \text{ ,}$$

この等式の左辺は

$$\frac{(\sin \theta)^2}{(\cos \theta)^2} + \frac{(\cos \theta)^2}{(\cos \theta)^2} = \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 + 1 = (\tan \theta)^2 + 1 = 1 + (\tan \theta)^2 \text{ ,}$$

従って $1 + (\tan \theta)^2 = \frac{1}{(\cos \theta)^2}$.

(証明終り)

【例題】 一般角 θ について $\tan \theta = 3$ かつ $\cos \theta \leq 0$ とする． $\cos \theta$ 及び $\sin \theta$ の値を求める．

【解説】 定理 6.4.3 より $1 + (\tan \theta)^2 = \frac{1}{(\cos \theta)^2}$ なので、

$$\frac{1}{(\cos \theta)^2} = 1 + (\tan \theta)^2 = 1 + 3^2 = 10 \text{ ,}$$

$$(\cos \theta)^2 = \frac{1}{10} \text{ ,}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{10}} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ ,}$$

$\cos \theta \leq 0$ なので $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. 更に、定理 6.4.1 より $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ なので、

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{10}} \text{ .}$$

【終

【問題 6.4.3】 一般角 θ について $\tan \theta = \frac{3}{2}$ かつ $\cos \theta \leq 0$ とします． $\cos \theta$ 及び $\sin \theta$ の値を求めなさい．

xy 座標平面の点 $P' = (x', y')$

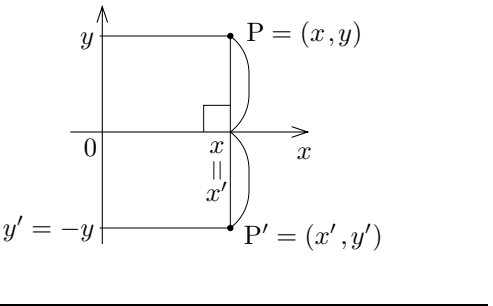
が点 $P = (x, y)$ と x 軸に関し

て対称であるとき、

$$x' = x \text{ , } y' = -y \text{ .}$$

このことから次の定理が導かれ

ます．



定理 6.4.4

任意の一般角 θ について、

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \text{ , } \quad \cos(-\theta) = \cos \theta \text{ ,}$$

$$\theta \text{ が } 90^\circ \text{ の奇数倍でないとき } \tan(-\theta) = -\tan \theta \text{ .}$$

証明 実数 r について $r > 0$ とする．点 O を原点とする xy 座標平面の点 $P = (x, y)$ を次のように定める：線分 OP は始線 Ox に対する角度 θ の線分で、 $\overline{OP} = r$. 更に、点 $P' = (x', y')$ を次のように定める：線分 OP' は始線 Ox に対する角度 $-\theta$ の線分で、 $\overline{OP'} = r$. $\overline{OP} = \overline{OP'}$ で、始線 Ox に対する線分 OP の角度は θ , 線分 OP' の角度は $-\theta$ なので、

点 $P' = (x', y')$ と点 $P = (x, y)$ とは x 軸に関して対称である．従って、

$$x' = x \text{ , } y' = -y \text{ .}$$

$\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\sin(-\theta) = \frac{y'}{r}$ なので、

$$\sin(-\theta) = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin \theta \text{ .}$$

$\cos \theta = \frac{x}{r}$, $\cos(-\theta) = \frac{x'}{r}$ なので

$$\cos(-\theta) = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = \cos \theta \text{ .}$$

更に、 θ が 90° の奇数倍でないとき、 $x \neq 0$ かつ $x' \neq 0$ で、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$,

$\tan(-\theta) = \frac{y'}{x'}$ なので、

$$\tan(-\theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta \text{ .}$$

(証明終り)

定理 6.4.5

xy 座標平面の点 P について、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であるとき、 $\overline{OP} = r$ とおくと

$$P = (r \cos \theta, r \sin \theta) \text{ .}$$

証明 $r = \overline{OP}$ は線分の長さなので $r \geq 0$. $r = 0$ のときと $r > 0$ のときに分ける．

$r = 0$ のとき、 $\overline{OP} = 0$ なので $P = O$, $r = 0$ より $(r \cos \theta, r \sin \theta) = (0, 0) = O$;

よって $P = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

$r > 0$ のとき、 $P = (x, y)$ とおく．余弦と正弦の定義より $\cos \theta = \frac{x}{r}$, $\sin \theta = \frac{y}{r}$

なので、

$$x = r \cos \theta \text{ , } y = r \sin \theta \text{ .}$$

よって $P = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

(証明終り)

【例題】 点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について、線分 OP の始線 Ox に対する角度が 30° で $\overline{OP} = 5$ とする．点 P を求める．

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ , } \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ なので、定理 6.4.5 より、}$$

$$P = (5 \cos 30^\circ, 5 \sin 30^\circ) = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ .}$$

【終

【問題 6.4.4】 点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について、線分 OP の始線 Ox に対する角度が 60° で $\overline{OP} = \frac{4}{3}$ とします．点 P を求めなさい．

定理 6.4.6

任意の一般角 θ について、

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \text{ , } \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{ .}$$

証明 任意の一般角 θ について、定理 6.4.2 より $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$. $S = \sin \theta$

とおき $C = \cos \theta$ とおくと $S^2 + C^2 = 1$. これより $C^2 = 1 - S^2$. C は実数なので $C^2 \geq 0$, よって $1 - S^2 \geq 0$. この不等式を S に関する不等式と考えて解く； $S^2 - 1 \leq 0$, $(S + 1)(S - 1) \leq 0$, $-1 \leq S \leq 1$. 故に $-1 \leq \sin \theta \leq 1$. また、 $S^2 + C^2 = 1$ より $1 - C^2 = S^2 \geq 0$, この不等式を C に関する不等式として解くと $-1 \leq C \leq 1$. 故に $-1 \leq \cos \theta \leq 1$.

(証明終り)