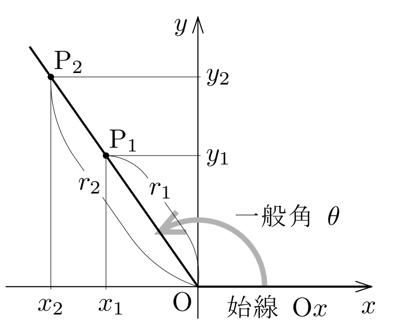
§6.3　一般角の三角比

xy 座標平面において，原点　$\mathrm{O}=(0,0)$　を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P_1 と P_2 とをとります．$\mathrm{P}_1 \neq \mathrm{O}$ ，$\mathrm{P}_2 \neq \mathrm{O}$ とします．次のようにおきます：

$$\mathrm{P}_1=(x_1,y_1)\ ,\qquad \mathrm{P}_2=(x_2,y_2)\ ;$$
$$\overline{\mathrm{OP}_1}=r_1\ ,\qquad \overline{\mathrm{OP}_2}=r_2\ .$$



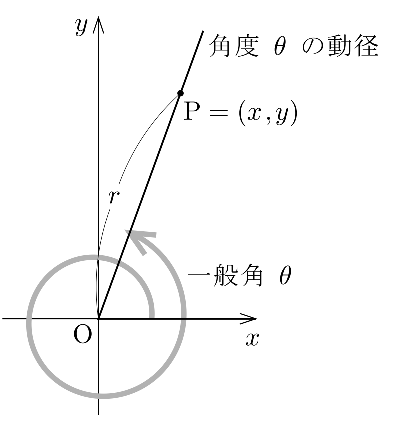
原点　$\mathrm{O}=(0,0)$　と点　$\mathrm{P}_1=(x_1,y_1)$　と点　$\mathrm{P}_2=(x_2,y_2)$　とは一直線上にありますから，　$\dfrac{y_1}{r_1}=\dfrac{y_2}{r_2}$ ，$\dfrac{x_1}{r_1}=\dfrac{x_2}{r_2}$ ；更に，$x_1\neq 0$ のとき，$x_2 \neq 0$ で $\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y_2}{x_2}$ ．

つまり，xy 座標平面において，原点 O から x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度（一般角）が θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり，$r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおくと，$\dfrac{y}{r}$ ，$\dfrac{x}{r}$ ，（ $x\neq 0$ のとき）$\dfrac{y}{x}$ の値は一般角 θ の値だけから唯一に決まります．このことに基づいて，一般角 θ に対して，θ の**正弦** (sine) $\sin\theta$ と θ の**余弦** (cosine) $\cos\theta$ と θ の**正接** (tangent) $\tan\theta$ とを定義します．

定義　一般角 θ の正弦 $\sin\theta$，余弦 $\cos\theta$，正接 $\tan\theta$ を次のように定義する：xy 座標平面において，原点　$\mathrm{O}=(0,0)$　を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点　$\mathrm{P}=(x,y)$　（但し $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）について　$r=\overline{\mathrm{OP}}$　とおくとき，

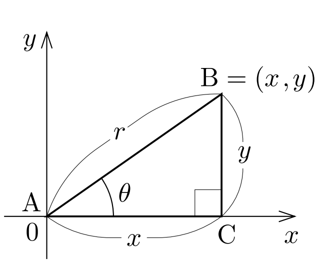
$$\sin\theta=\frac{y}{r}\ ,\qquad \cos\theta=\frac{x}{r}\ ,$$

$$x\neq 0 \text{ のとき}\quad \tan\theta=\frac{y}{x}\ .$$



一般角の正弦・余弦・正接などを三角比といいます．

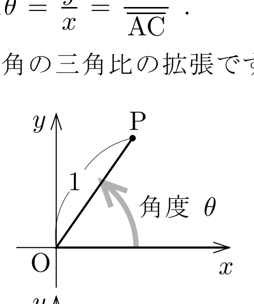
角度 θ について　$0^\circ<\theta<90^\circ$　とします．相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において　$\angle\mathrm{BAC}=\theta$　かつ　$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$　とします．次のように xy 座標系を定めます：A が原点 $(0,0)$ で，点 C は x 軸上にあり C の x 座標は正で，点 B の y 座標は正である．　$\overline{\mathrm{AB}}=r$ ，$\mathrm{B}=(x,y)$　とおきます．　$x>0$　なので　$x=\overline{\mathrm{AC}}$ ，$y>0$　なので　$y=\overline{\mathrm{CB}}$ ．線分 AB の始線 $\mathrm{A}x$ に対する角度は θ ですから，

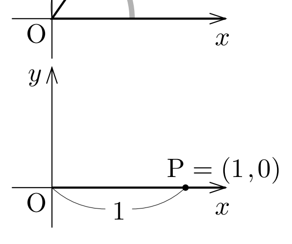


$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}\ ,\qquad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}\ ,\qquad \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}\ .$$

このように一般角の三角比は6.1節で述べた直角三角形の内角の三角比の拡張です．

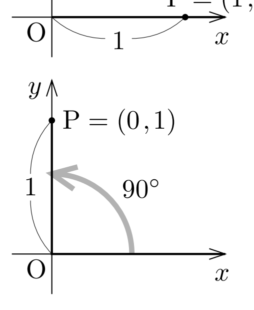
xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で　$\overline{\mathrm{OP}}=1$　である点 P を考えます．始線 $\mathrm{O}x$ に対する線分 OP の角度が　$\theta=0^\circ$　のとき，線分 OP は始線 $\mathrm{O}x$ に重なります．　$\overline{\mathrm{OP}}=1$ ，$\mathrm{P}=(1,0)$　なので，





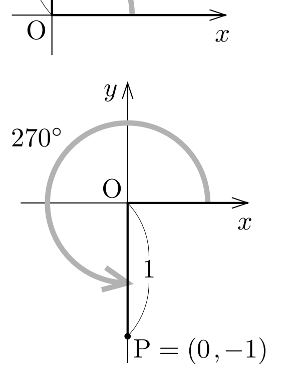
$$\sin 0^\circ=\frac{0}{1}=0\ ,\quad \cos 0^\circ=\frac{1}{1}=1\ ,$$
$$\tan 0^\circ=\frac{0}{1}=0\ .$$

始線 $\mathrm{O}x$ に対する線分 OP の角度が　$\theta=90^\circ$　のとき，線分 OP は y 軸の y 座標が 0 以上の部分に重なります．　$\overline{\mathrm{OP}}=1$ ，$\mathrm{P}=(0,1)$　なので，



$$\sin 90^\circ=\frac{1}{1}=1\ ,\qquad \cos 90^\circ=\frac{0}{1}=0\ ;$$

$\tan 90^\circ$ の値はありません．更に，始線 $\mathrm{O}x$ に対する線分 OP の角度が　$\theta=270^\circ$　のとき，　$\mathrm{P}=(0,-1)$　なので，$\tan 270^\circ$ の値はありません．　$\theta=\pm 90^\circ,\pm 270^\circ,\pm 450^\circ,\ldots$　のとき，つまり一般角 θ が 90° の奇数倍であるとき，$\tan\theta$ の値はありません．一般角 θ が 90° の奇数倍でないとき $\tan\theta$ の値があります．



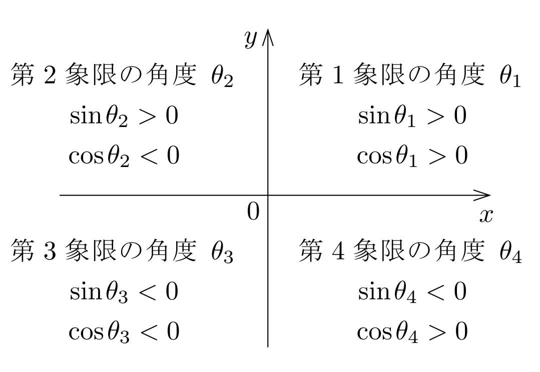
一般角 θ に対して，xy 座標平面において原点　$\mathrm{O}=(0,0)$　と，始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点　$\mathrm{P}=(x,y)$　（ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）とをとり，　$r=\overline{\mathrm{OP}}>0$　とおきます．θ の正弦・余弦の符号は次のようになります：

θ が第 1 象限の角度のとき，$x>0$ なので $\cos\theta=\dfrac{x}{r}>0$，$y>0$ なので $\sin\theta=\dfrac{y}{r}>0$ ；

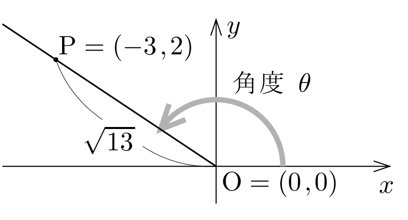
θ が第 2 象限の角度のとき，$x<0$ なので $\cos\theta=\dfrac{x}{r}<0$，$y>0$ なので $\sin\theta=\dfrac{y}{r}>0$ ；

θ が第 3 象限の角度のとき，$x<0$ なので $\cos\theta=\dfrac{x}{r}<0$，$y<0$ なので $\sin\theta=\dfrac{y}{r}<0$ ；

θ が第 4 象限の角度のとき，$x>0$ なので $\cos\theta=\dfrac{x}{r}>0$，$y<0$ なので $\sin\theta=\dfrac{y}{r}<0$.



$\boxed{\text{例題}}$　一般角 θ に対して，xy 座標平面において原点　$\mathrm{O}=(0,0)$　を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に点　$\mathrm{P}=(-3,2)$　が属すとする．θ の正弦 $\sin\theta$，余弦 $\cos\theta$，正接 $\tan\theta$ の各々の値を求める．



$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{13}\ .$$

正弦・余弦・正接の定義より，

$$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}\ ,\qquad \cos\theta=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3}{\sqrt{13}}\ ,\qquad \tan\theta=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.3.1}}$　一般角 θ に対して，xy 座標平面において原点　$\mathrm{O}=(0,0)$　を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に点　$\mathrm{P}=(5,-4)$　が属すとします．θ の正弦 $\sin\theta$，余弦 $\cos\theta$，正接 $\tan\theta$ の各々の値を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面の点　$\mathrm{P}=(0,3)$　に対して，原点　$\mathrm{O}=(0,0)$　を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する線分 OP の角度を θ とする．θ の正弦 $\sin\theta$，余弦 $\cos\theta$，正接 $\tan\theta$ の各々の値を求める．

$\overline{\mathrm{OP}}=3$　なので，　$\sin\theta=\dfrac{3}{3}=1$ ，　$\cos\theta=\dfrac{0}{3}=0$ ．　$\tan\theta$ の値は無い．　$\boxed{\text{終}}$

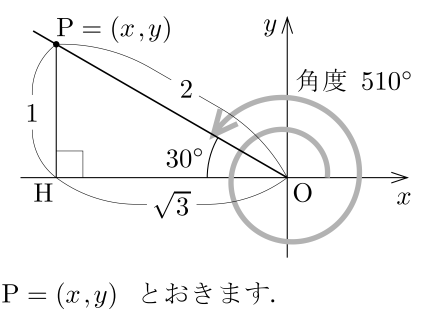
$\boxed{\text{問題 6.3.2}}$　xy 座標平面の点　$\mathrm{P}=(0,-5)$　に対して，原点　$\mathrm{O}=(0,0)$　を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する線分 OP の角度を θ とします．θ の正弦 $\sin\theta$，余弦 $\cos\theta$，正接 $\tan\theta$ の各々の値を求めなさい．

$\boxed{\text{例解}}$　一般角 510° の正弦 $\sin 510^\circ$，余弦 $\cos 510^\circ$，正接 $\tan 510^\circ$ の各々の値を求めます．xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 510° の動径に属す点 P（ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり，点 P から x 軸に下した垂線の足を H とおき，直角三角形 OPH に着目します．

$$\angle\mathrm{POH}=180^\circ-(510^\circ-360^\circ)=30^\circ\ .$$

よって直角三角形 OPH の内角は 30° と 60° と 90° なので，

$$\overline{\mathrm{HP}}:\overline{\mathrm{PO}}:\overline{\mathrm{OH}}=1:2:\sqrt{3}\ .$$



点 P は角度 510° の動径に属す O 以外のどの点でもよいので，　$r=\overline{\mathrm{OP}}=2$　とします．　$\mathrm{P}=(x,y)$　とおきます．

$$|x|=\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3}\ ,\qquad |y|=\overline{\mathrm{HP}}=1\ .$$

点　$\mathrm{P}=(x,y)$　は第 2 象限に属すので　$x<0$　かつ　$y>0$ ，よって　$x=-\sqrt{3}$　かつ　$y=1$ ．

$$\sin 510^\circ=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}\ ,$$
$$\cos 510^\circ=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$\tan 510^\circ=\frac{y}{x}=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

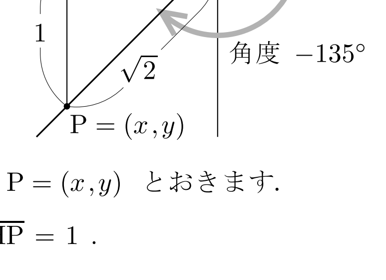
$\boxed{\text{問題 6.3.3}}$　xy 座標平面において，原点 O から x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 660° の動径を描き，一般角 660° の正弦 $\sin 660^\circ$，余弦 $\cos 660^\circ$，正接 $\tan 660^\circ$ の各々の値を求めなさい．

$\boxed{\text{例解}}$　一般角 -135° の正弦 $\sin(-135^\circ)$，余弦 $\cos(-135^\circ)$，正接 $\tan(-135^\circ)$ の各々の値を求めます．xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 -135° の動径に属す点 P（ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり，点 P から x 軸に下した垂線の足を H とおき，直角三角形 OPH に着目します．

$$\angle\mathrm{POH}=180^\circ-135^\circ=45^\circ\ .$$

よって直角三角形 OPH は直角二等辺三角形なので，

$$\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{HO}}:\overline{\mathrm{OP}}=1:1:\sqrt{2}\ .$$



点 P は角度 -135° の動径に属す O 以外のどの点でもよいので，　$r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2}$　とします．　$\mathrm{P}=(x,y)$　とおきます．

$$|x|=\overline{\mathrm{OH}}=1\ ,\qquad |y|=\overline{\mathrm{HP}}=1\ .$$

点　$\mathrm{P}=(x,y)$　は第 3 象限に属すので　$x<0$　かつ　$y<0$ ，よって　$x=-1$　かつ　$y=-1$ ．

$$\sin(-135^\circ)=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$\cos(-135^\circ)=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$\tan(-135^\circ)=\frac{y}{x}=\frac{-1}{-1}=1\ .$$

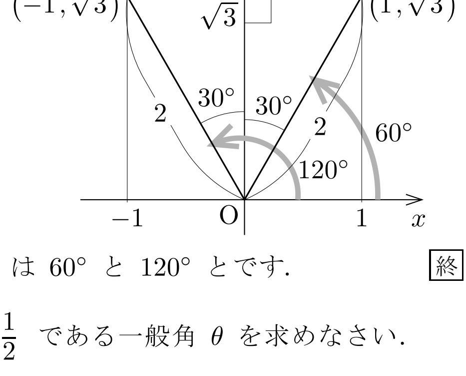
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.3.4}}$　xy 座標平面において，原点 O から x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 -225° の動径を描き，一般角 -225° の正弦 $\sin(-225^\circ)$，余弦 $\cos(-225^\circ)$，正接 $\tan(-225^\circ)$ の各々の値を求めなさい．

三角比の値から角度を求めてみます．

$\boxed{\text{例解}}$　$0^\circ\leq\theta\leq 180^\circ$　の範囲で　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　である一般角 θ を求めます．xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点　$\mathrm{P}=(x,y)$　（ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり，　$r=\overline{\mathrm{OP}}$　とおきます．

$$\frac{y}{r}=\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$y:r=\sqrt{3}:2\ .$$



$r=\overline{\mathrm{OP}}=2$　とします．　$y=\sqrt{3}$ ．

$r^2=\overline{\mathrm{OP}}^2=x^2+y^2$　なので　$x^2=r^2-y^2=2^2-\sqrt{2}^{\,2}=1$ ，よって　$x=\pm 1$ ．

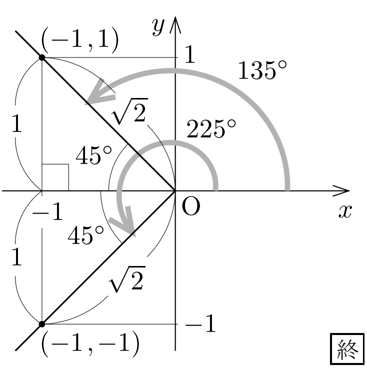
点 P は $\left(1,\sqrt{3}\right)$ または $\left(-1,\sqrt{3}\right)$ です．

右図のように始線 $\mathrm{O}x$ に対する OP の角度 θ は 60° と 120° とです．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.3.5}}$　$0^\circ\leq\theta\leq 180^\circ$　の範囲で　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　である一般角 θ を求めなさい．

$\boxed{\text{例解}}$　$0^\circ\leq\theta\leq 360^\circ$　の範囲で　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　である一般角 θ を求めます．xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点　$\mathrm{P}=(x,y)$　（ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり，　$r=\overline{\mathrm{OP}}$　とおきます．

$$\frac{x}{r}=\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$x:r=-1:\sqrt{2}\ .$$



$r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2}$　とします．　$x=-1$ ．　$r^2=\overline{\mathrm{OP}}^2=x^2+y^2$　なので　$y^2=r^2-x^2=\sqrt{3}^{\,2}-1^2=1$ ，よって　$y=\pm 1$ ．　点 P は $(-1,1)$ または $(-1,-1)$ です．　右図のように始線 $\mathrm{O}x$ に対する OP の角度 θ は 135° と 225° とです．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.3.6}}$　$0^\circ\leq\theta\leq 360^\circ$　の範囲で　$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　である一般角 θ を求めなさい．