

## §6.1 鋭角の三角比

角度  $34^\circ$  や  $67^\circ$  などを表す変数にしばしばギリシャ文字の  $\theta$  などを用います。

角度  $\theta$  について  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  とします。相異なる 3 点  $A_1, B_1, C_1$  を頂点とする三角形  $A_1B_1C_1$  と、相異なる 3 点  $A_2, B_2, C_2$  を頂点とする三角形  $A_2B_2C_2$  について、

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2 = \theta, \quad \angle A_1C_1B_1 = \angle A_2C_2B_2 = 90^\circ$$

とします。このとき三角形  $A_1B_1C_1$  と  $A_2B_2C_2$

とは相似です。三角形  $A_1B_1C_1$  に対する三角

形  $A_2B_2C_2$  の相似比を  $r$  とおきます。三角形

$A_2B_2C_2$  は三角形  $A_1B_1C_1$  の  $r$  倍です。

$$\overline{A_2B_2} = r\overline{A_1B_1}, \quad \overline{B_2C_2} = r\overline{B_1C_1},$$

よって

$$\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{r\overline{B_1C_1}}{r\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{A_1B_1}}.$$

同様にして次の等式が導かれます：

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{A_2B_2}}, \quad \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{A_2C_2}}.$$

角度  $\theta$  について  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  とします。相異なる 3 点

$A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  において  $\angle BAC = \theta$

かつ  $\angle ACB = 90^\circ$  とします。角度  $\theta$  に対して、 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ ,

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ ,  $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$  の各々の値は直角三角形  $ABC$  の大きさに関わ

らず唯一つに決まります。 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$  の値を、 $\theta$  の正弦 (sine)

といい  $\sin\theta$  と書き表します。 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$  の値を、 $\theta$  の余弦 (cosine) とい

い  $\cos\theta$  と書き表します。 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$  の値を、 $\theta$  の正接 (tangent) とい

い  $\tan\theta$  と書き表します。

$\sin\theta = \sin\angle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ ,  $\cos\theta = \cos\angle BAC = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ ,  $\tan\theta = \tan\angle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ .

角度に対するこのような直角三角形の辺の長さの比 (の値) を三角比といいます。

相異なる 3 点  $A, B, D$  を頂点とする三角形

$ABD$  は正三角形であるとして、辺  $\overline{AD}$  の中

点を  $C$  とおきます。 $\overline{AC} = a > 0$  とおきます。

$$\overline{CD} = \overline{AC} = a,$$

よって

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = a + a = 2a.$$

三角形  $ABD$  は正三角形ですから、

$$\overline{AB} = \overline{AD} = 2a > 0.$$

$\angle ACB = 90^\circ$  なので、直角三角形  $ABC$  において、ピタゴラスの定理より、

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2.$$

$\overline{AC} = a$ ,  $\overline{AB} = 2a$  なので、

$$\overline{BC}^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2,$$

$a > 0$  なので

$$\overline{BC} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a.$$

こうして、直角三角形  $ABC$  について次のようになります：

$$\overline{AB} = 2a, \quad \overline{BC} = \sqrt{3}a, \quad \overline{AC} = a.$$

三角形  $ABD$  直角三角形  $ABC$  において  $\angle ACB = 90^\circ$ ,

$\angle BAC = 60^\circ$  なので、正弦・余弦・正接の定義より以下の

式が導かれます：

$$\sin 60^\circ = \sin\angle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \cos\angle BAC = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\tan 60^\circ = \tan\angle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}.$$

更に、直角三角形  $ABC$  において  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$  なので、

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB - \angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

従って正弦・余弦・正接の定義より以下の式が導か

れます：

$$\sin 30^\circ = \sin\angle ABC = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \cos\angle ABC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan 30^\circ = \tan\angle ABC = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

相異なる 3 点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  について  $\angle BAC = 45^\circ$ ,

$\angle ACB = 90^\circ$  とします。

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB - \angle BAC = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ = \angle BAC,$$

従って直角三角形  $ABC$  は二等辺三角形ですから、 $\overline{AC} = \overline{BC}$ .  $\overline{AC} = \overline{BC} = a > 0$

とおきます。ピタゴラスの定理より

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$

$a > 0$  なので、

$$\overline{AB} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

こうして以下の式が導かれます：

$$\sin 45^\circ = \sin\angle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 45^\circ = \cos\angle BAC = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 45^\circ = \tan\angle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{a} = 1.$$

以上の結果をまとめておきます：

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 45^\circ = 1;$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

直角三角形の内角の大きさと一辺の長さが分かれば、三角比の値を用いて、他の二

辺の長さを求めることができます。

**【例題】** 相異なる 3 点  $P, Q, R$  を頂点とする三角形  $PQR$  において、 $\angle QPR = 90^\circ$  かつ

$\angle PQR = 60^\circ$  かつ  $\overline{PR} = 5\sqrt{3}$  とする。他の 2 辺の長さ  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{QR}$  を求める。

【解説】 正弦の定義より

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}} = \sin\angle PQR = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

従って

$$\overline{QR} = \frac{\overline{PR}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{PR} = \frac{2}{\sqrt{3}}5\sqrt{3} = 10.$$

また、ピタゴラスの定理より、

$$\overline{PQ}^2 = \overline{QR}^2 - \overline{PR}^2 = 100 - 75 = 25.$$

$\overline{PQ} \geq 0$  なので  $\overline{PQ} = 5$ .

終

**【問題 6.1.1】** 相異なる 3 点  $P, Q, R$  を頂点とする三角形  $PQR$  において、

$\angle PQR = 90^\circ$  かつ  $\angle QPR = 30^\circ$  かつ  $\overline{PQ} = \sqrt{6}$  とします。他の 2 辺の長さ  $\overline{PR}$ ,

$\overline{QR}$  を求めなさい。

**【例題】** 相異なる 3 点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  において、 $\angle BAC = 90^\circ$  かつ

$\cos\angle ACB = \frac{2}{3}$  かつ  $\overline{BC} = 6$  とする。他の 2 辺の長さ  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  を求める。

【解説】 余弦の定義より

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \cos\angle ACB = \frac{2}{3},$$

従って

$$\overline{AC} = \frac{2}{3}\overline{BC} = \frac{2}{3} \times 6 = 4.$$

また、ピタゴラスの定理より、

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = 6^2 - 4^2 = 20.$$

$\overline{AB} \geq 0$  なので、 $\overline{AB} = \sqrt{20}$ .

終

**【問題 6.1.2】** 相異なる 3 点  $A, B, C$  を頂点とする三角形  $ABC$  において、 $\angle ABC = 90^\circ$

かつ  $\overline{AC} = 8$  かつ  $\sin\angle BAC = \frac{3}{4}$  とします。他の 2 辺の長さ  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  を求めな

さい。

