

第5章の補遺2 絶対値が現れる不等式の解法

定理5.3.4及び定理5.3.5として次の定理を述べました：任意の実数 a と b について、

$$|a| < b \iff -b < a < b, \quad |a| > b \iff a > b \text{ または } a < -b ;$$

$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b, \quad |a| \geq b \iff a \geq b \text{ または } a \leq -b .$$

この定理を用いると、絶対値記号が現れる不等式が比較的簡単に解けることがあります。

例題 変数 x に関する不等式 $|2x-1|-4 < x$ を解く。

$$|2x-1|-4 < x \iff |2x-1| < x+4 \iff -(x+4) < 2x-1 < x+4 .$$

従って、 x に関する不等式 $-(x+4) < 2x-1 < x+4$ 、つまり

$$-(x+4) < 2x-1 \text{ かつ } 2x-1 < x+4$$

を解けばよい。不等式 $-(x+4) < 2x-1$ を解くと $x > -1$ 。不等式 $2x-1 < x+4$ を解くと $x < 5$ 。故に、与えられた不等式を解くと、 $x > -1$ かつ $x < 5$ 、つまり $-1 < x < 5$ 。 終

問題 5.補遺2.1 変数 x に関する以下の不等式を解きなさい。

$$(1) |3x-4|+2x \leq 5 . \quad (2) 2|x-4| < 3x-5 .$$

例題 変数 x に関する不等式 $|3x-10|-x \geq 2$ を解く。

$$|3x-10|-x \geq 2 \iff |3x-10| \geq x+2$$

$$\iff 3x-10 \geq x+2 \text{ または } 3x-10 \leq -(x+2) .$$

不等式 $3x-10 \geq x+2$ を解くと $x \geq 6$ 。不等式 $3x-10 \leq -(x+2)$ を解くと $x \leq 2$ 。故に、与えられた不等式を解くと、 $x \geq 6$ または $x \leq 2$ 。 終

問題 5.補遺2.2 変数 x に関する以下の不等式を解きなさい。

$$(1) |3x-7|+2x \geq 8 . \quad (2) \frac{|x-7|}{2} > x-4 .$$