

第5章の補遺1 分数式が現れる不等式の解法

分数式が現れる不等式のうち簡単なものを解きます。

例解 変数 x に関する不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を解きます。左辺の分数式の分母 $x-4$ を両辺に掛けて分母を払いたいところですが、それには問題があります。実数 a, b, c について、法則 1.5.3 及び定理 1.5.5 より、

$$a < b \text{ ならば, } \begin{cases} c > 0 \text{ のとき } ac < bc \\ c < 0 \text{ のとき } ac > bc \end{cases} .$$

このことより、不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ の両辺に $x-4$ を掛けると、 $x-4 > 0$ のときは $3x < 2(x-4)$ で、 $x-4 < 0$ のときは $3x > 2(x-4)$ です。予め $x-4 > 0$ か $x-4 < 0$ かは分かりませんから、不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ の両辺に $x-4$ を掛けたとき $3x < 2(x-4)$ なのか $3x > 2(x-4)$ なのか分かりません⁶⁾。ですから別の解法を考えます。

不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を解くために、左辺から右辺を引きます：

$$\frac{3x}{x-4} - 2 = \frac{3x}{x-4} - \frac{2(x-4)}{x-4} = \frac{3x-2(x-4)}{x-4} = \frac{x+8}{x-4} ;$$

そして不等式を次のように同値変形します：

$$\frac{3x}{x-4} < 2 \iff \frac{3x}{x-4} - 2 < 0 \iff \frac{x+8}{x-4} < 0 .$$

このことより、与えられた不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ と同値な不等式 $\frac{x+8}{x-4} < 0$ を解きます。そのために、次のような表を作って分数式 $\frac{x+8}{x-4}$ の値の符号を調べます。 $x=4$ のとき、 $x-4=0$ なので、分数式 $\frac{x+8}{x-4}$ の値はありません。

x の値	$x < -8$	$x = -8$	$-8 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$
$x+8$ の値の符号	−	0	+	+	+
$x-4$ の値の符号	−	−	−	0	+
$\frac{x+8}{x-4}$ の値の符号	+	0	−	値なし	+

この表より、

$$\frac{x+8}{x-4} < 0 \iff -8 < x < 4 .$$

故に、与えられた不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を解くと $-8 < x < 4$.

終

例題 変数 x に関する不等式 $\frac{4x-13}{2x-3} \leq 3$ を解く。

〔解説〕

$$\frac{4x-13}{2x-3} - 3 = \frac{4x-13-3(2x-3)}{2x-3} = \frac{-2x-4}{2x-3} = -2 \cdot \frac{x+2}{2x-3} ,$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{4x-13}{2x-3} \leq 3 &\iff \frac{4x-13}{2x-3} - 3 \leq 0 \iff -2 \cdot \frac{x+2}{2x-3} \leq 0 \\ &\iff \frac{x+2}{2x-3} \geq 0 . \end{aligned}$$

不等式 $\frac{x+2}{2x-3} \geq 0$ を解く。分数式 $\frac{x+2}{2x-3}$ の値の符号を調べて表を作る。

x の値	...	-2	...	$\frac{3}{2}$	...
$x+2$ の値の符号	−	0	+	+	+
$2x-3$ の値の符号	−	−	−	0	+
$\frac{x+2}{2x-3}$ の値の符号	+	0	−	値なし	+

この表より、不等式 $\frac{x+2}{2x-3} \geq 0$ を解くと、 $x \leq -2$ または $x > \frac{3}{2}$.

故に、与えられた不等式を解くと、 $x \leq -2$ または $x > \frac{3}{2}$.

終

問題 5.補遺1 変数 x に関する以下の不等式を解きなさい。

$$(1) \frac{5}{x+1} < 2 . \qquad (2) \frac{3x-13}{2x-3} \geq 3 . \qquad (3) \frac{7x-8}{3x+2} \geq 1 .$$

⁶⁾ 例えば不等式 $\frac{x+4}{3} < 2$ では、 $3 > 0$ と分かっていますから、 $\frac{x+4}{3} < 2$ の両辺に 3 を掛けて不等式 $x+4 < 6$ が導かれます。