§5.8　2次不等式の解法

実数を表す定数 a,b,c（但し $a\neq 0$ ）に対して，実数を表す変数 x に関する2次不等式

$$ax^2+bx+c<0\ ,\quad ax^2+bx+c\leq 0\ ,\quad ax^2+bx+c>0\ ,\quad ax^2+bx+c\geq 0$$

を解きます．まず次の基本方針を憶えて下さい．

> 実数を表す定数 a,b,c（但し $a\neq 0$ ）に対して，変数 x に関する2次不等式
>
> $$ax^2+bx+c<0\ ,\quad ax^2+bx+c\leq 0\ ,\quad ax^2+bx+c>0\ ,\quad ax^2+bx+c\geq 0$$
>
> を解くために，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 b^2-4ac について，
>
> $b^2-4ac\geq 0$ のときは 左辺 ax^2+bx+c を因数分解して，
>
> $b^2-4ac<0$ のときは 左辺 ax^2+bx+c を平方完成する．

最初に2次不等式の左辺の2次式 ax^2+bx+c について $b^2-4ac>0$ のときを扱います．このとき，定理3.5より，2次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で1次式の積に因数分解できます．

例解　変数 x に関する以下の2次不等式を解きます：

$$x^2-5x+4<0\ ,\quad x^2-5x+4\leq 0\ ,\quad x^2-5x+4>0\ ,\quad x^2-5x+4\geq 0\ .$$

まず左辺の2次式 x^2-5x+4 を因数分解します：

$$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)\ .$$

因数 $x-1$, $x-4$ の値の符号は次のようになります：

$x<1$ のとき $x-1<0$ ，　$x=1$ のとき $x-1=0$ ，　$x>1$ のとき $x-1>0$ ；

$x<4$ のとき $x-4<0$ ，　$x=4$ のとき $x-4=0$ ，　$x>4$ のとき $x-4>0$ ．

これらのことより， $x=1$ のところと $x=4$ のところとが符号が変わる境目になります：

$x<1$ のとき，$x-1<0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)>0$ ；

$x=1$ のとき，$x-1=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$ ；

$1<x<4$ のとき，$x-1>0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)<0$ ；

$x=4$ のとき，$x-4=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$ ；

$x>4$ のとき，$x-1>0$ かつ $x-4>0$ なので $(x-1)(x-4)>0$ ．

これらのことを次のような表で表します．

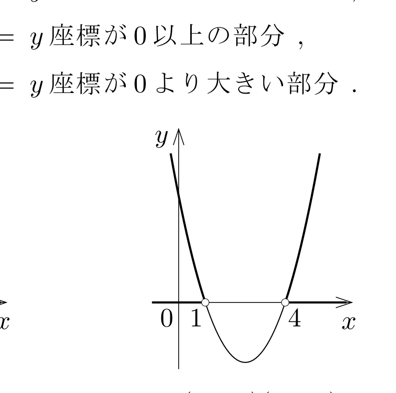
x の値	$x<1$	$x=1$	$1<x<4$	$x=4$	$4<x$
$x-1$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-4)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

この表から次のことが分かります：

$$(x-1)(x-4)<0 \iff (x-1)(x-4)\text{ の符号は }- \iff 1<x<4\,;$$
$$(x-1)(x-4)\leq 0 \iff (x-1)(x-4)\text{ の符号は }-\text{ か }0 \iff 1\leq x\leq 4\,;$$
$$(x-1)(x-4)>0 \iff (x-1)(x-4)\text{ の符号は }+ \iff x<1\text{ または }x>4\,;$$
$$(x-1)(x-4)\geq 0 \iff (x-1)(x-4)\text{ の符号は }+\text{ か }0 \iff x\leq 1\text{ または }x\geq 4\,.$$

これらのことは x の関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフからも分かります． xy 座標平面において， $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とです．また， $y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線です． $y=(x-1)(x-4)$ のとき

$$(x-1)(x-4)\leq 0 \iff y\leq 0\ .$$



$y=(x-1)(x-4)\leq 0$

$\Leftrightarrow\ 1\leq x\leq 4$

従って， $y=x^2-5x-4$ のグラフにおいて次のようになります：

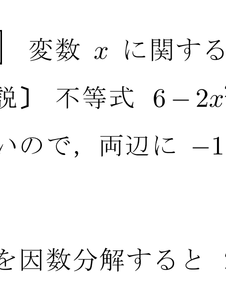
x 座標について $(x-1)(x-4)\leq 0$ となる部分 ＝ y 座標が0以下の部分 ．

同様に考えると， $y=(x-1)(x-4)$ のグラフにおいて次のようになります：

x 座標について $(x-1)(x-4)<0$ となる部分 ＝ y 座標が0より小さい部分 ，

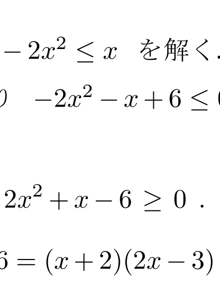
x 座標について $(x-1)(x-4)\geq 0$ となる部分 ＝ y 座標が0以上の部分 ，

x 座標について $(x-1)(x-4)>0$ となる部分 ＝ y 座標が0より大きい部分 ．



$y=(x-1)(x-4)<0$

$\Leftrightarrow\ 1<x<4$



$y=(x-1)(x-4)\geq 0$

$\Leftrightarrow\ x\leq 1$ または $x\geq 4$

$y=(x-1)(x-4)>0$

$\Leftrightarrow\ x<1$ または $x>4$

このようにして以下のことが分かります：

不等式 $(x-1)(x-4)<0$ を解くと　$1<x<4$ ，

不等式 $(x-1)(x-4)\leq 0$ を解くと　$1\leq x\leq 4$ ，

不等式 $(x-1)(x-4)>0$ を解くと　$x<1$ または $x>4$ ，

不等式 $(x-1)(x-4)\geq 0$ を解くと　$x\leq 1$ または $x\geq 4$ ．　終

例題　変数 x に関する不等式 $6-2x^2\leq x$ を解く．

〔解説〕 不等式 $6-2x^2\leq x$ より $-2x^2-x+6\leq 0$ ． x^2 の係数を正にする方が考え易いので，両辺に -1 を掛けて

$$2x^2+x-6\geq 0\ .$$

左辺を因数分解すると $2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ なので

$$(x+2)(2x-3)\geq 0\ .$$

符号を調べるためには x の係数が 1 の方が分かりやすいので，左辺の因数 $2x-3$ と右辺とを 2 で割ります：

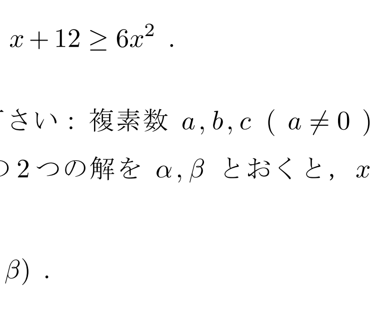
$$(x+2)\left(\frac{2x-3}{2}\right)\geq\frac{0}{2}\ ,$$
$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)\geq 0\ .$$

x の値について場合分けして，左辺の2次式の値の符号を調べる．

x の値	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<\frac{3}{2}$	$x=\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}<x$
$x+2$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{3}{2}$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

この表を次のように略す．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$



この表より，

$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)\geq 0 \iff x\leq -2\ \text{ または }\ x\geq\frac{3}{2}\ .$$

故に，与えられた不等式を解くと， $x\leq -2$ または $x\geq\dfrac{3}{2}$ ．　終

問題 5.8.1　変数 x に関する以下の不等式を解きなさい．

(1) $3x^2+7x>6$ ．　　(2) $x+12\geq 6x^2$ ．

2次式の因数分解の公式（3.5節）を思い起こして下さい：複素数 a,b,c ($a\neq 0$) について，x に関する2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α,β とおくと，x の2次式 ax^2+bx+c は次のように因数分解できる：

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)\ .$$

例題　変数 k に関する不等式 $k(6-k)>7$ を解く．

〔解説〕 不等式 $k(6-k)>7$ より， $6k-k^2>7$ なので

$$k^2-6k+7<0\ .$$

k に関する2次方程式 $k^2-6k+7=0$ の解は $3\pm\sqrt{2}$ なので，2次式の因数分解の公式（3.5節）より

$$k^2-6+7=\bigl(k-3+\sqrt{2}\bigr)\bigl(k-3-\sqrt{2}\bigr)\ .$$

この k の2次式の値の符号を調べる．

k	$\cdots$	$3-\sqrt{2}$	$\cdots$	$3+\sqrt{2}$	$\cdots$
$k-3+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$k-3-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\bigl(k-3+\sqrt{2}\bigr)\bigl(k-3-\sqrt{2}\bigr)$	$+$	0	$-$	0	$+$

この表より

$$k^2-6k+7<0 \iff \bigl(k-3+\sqrt{2}\bigr)\bigl(k-3-\sqrt{2}\bigr)<0$$
$$\iff 3-\sqrt{2}<k<3+\sqrt{2}\ .$$

故に，与えられた不等式を解くと $3-\sqrt{2}<k<3+\sqrt{2}$ ．　終

問題 5.8.2　変数 x に関する以下の不等式を解きなさい．

(1) $x^2+4\geq 6x$ ．　　(2) $2x(x+2)<1$ ．

次に2次不等式の左辺の2次式 ax^2+bx+c について $b^2-4ac=0$ のときを扱います．このとき，定理3.4より，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ には実数の重解 α があり，2次式 ax^2+bx+c は $a(x-\alpha)^2$ の形に因数分解できます．

例解　変数 x に関する以下の2次不等式を解きます：

$$x^2-6x+9\geq 0\ ,\quad x^2-6x+9<0\ ,\quad x^2-6x+9>0\ ,\quad x^2-6x+9\leq 0\ .$$

左辺の2次式 x^2-6x+9 を因数分解すると

$$x^2-6x+9=(x-3)^2\ .$$

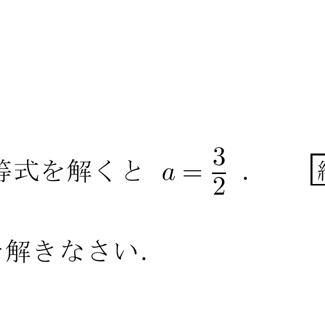
x がどんな実数でも $(x-3)^2\geq 0$ ですから，総ての実数が不等式 $(x-3)^2\geq 0$ の解です．また，x がどんな実数でも $(x-3)^2\geq 0$ ですから， $(x-3)^2<0$ となる実数 x はありません；つまり，不等式 $(x-3)^2<0$ の解はありません．更に，定理5.1.3を思い起こして下さい：任意の実数 A について，

$$A^2\leq 0 \iff A=0\ ,$$
$$A^2>0 \iff A\neq 0\ .$$

このことから，

$$(x-3)^2\leq 0 \iff x-3=0 \iff x=3\ ,$$
$$(x-3)^2>0 \iff x-3\neq 0 \iff x\neq 3\ ,$$

故に，不等式 $(x-3)^2\leq 0$ を解くと $x=3$ ，不等式 $(x-3)^2>0$ を解くと $x\neq 3$ ．



終

例題　変数 a に関する不等式 $a-\dfrac{a^2}{3}\geq\dfrac{3}{4}$ を解く．

〔解説〕 不等式 $a-\dfrac{a^2}{3}\geq\dfrac{3}{4}$ より $-\dfrac{a^2}{3}+a-\dfrac{3}{4}\geq 0$ ，両辺に -3 を掛けて

$$a^2-3a+\frac{9}{4}\leq 0\ ,$$

この不等式の左辺は $a^2-3a+\dfrac{9}{4}=\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2$ なので，

$$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2\leq 0\ .$$

よって $a-\dfrac{3}{2}=0$ なので $a=\dfrac{3}{2}$ ．故に，与えられた不等式を解くと $a=\dfrac{3}{2}$ ．　終

問題 5.8.3　変数 k に関する不等式 $-3k^2-2k\geq\dfrac{1}{3}$ を解きなさい．

例題　変数 t に関する不等式 $2t-\dfrac{3}{2}t^2<\dfrac{2}{3}$ を解く．

〔解説〕 不等式 $2t-\dfrac{3}{2}t^2<\dfrac{2}{3}$ より $-\dfrac{3}{2}t^2+2t-\dfrac{2}{3}<0$ ，両辺に $-\dfrac{2}{3}$ を掛けて

$$t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{9}>0\ ,$$

この不等式の左辺は $t^2-\dfrac{4}{3}t+\dfrac{4}{9}=\left(t-\dfrac{2}{3}\right)^2$ なので，

$$\left(t-\frac{2}{3}\right)^2>0\ .$$

よって $t-\dfrac{2}{3}\neq 0$ なので $t\neq\dfrac{2}{3}$ ．故に，与えられた不等式を解くと $t\neq\dfrac{2}{3}$ ．　終

問題 5.8.4　変数 y に関する不等式 $y-\dfrac{3}{5}y^2<\dfrac{5}{12}$ を解きなさい．

最後に2次不等式の左辺の2次式 ax^2+bx+c について $b^2-4ac<0$ のときを扱います．

例解　変数 x に関する以下の2次不等式を解きます：

$$2x^2-8x+9>0\ ,\quad 2x^2-8x+9\leq 0\ ,\quad 2x^2-8x+9\geq 0\ ,\quad 2x^2-8x+9<0\ .$$

左辺の2次式 $2x^2-8x+9$ を平方完成します：

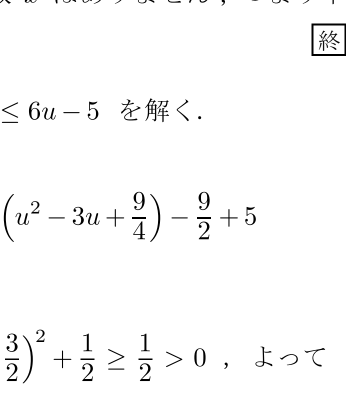
$$2x^2-8x+9=2(x^2-4x)+9=2(x^2-4x+4)-8+9=2(x-2)^2+1\ .$$

x がどんな実数でも， $(x-2)^2\geq 0$ なので， $2(x-2)^2\geq 0$ ， $2(x-2)^2+1\geq 1>0$ ，よって $2x^2-8x+9>0$ ．つまり，

任意の実数 x について　$2x^2-8x+9>0$ ．

よって，総ての実数が不等式 $2x^2-8x+9>0$ の解です．また，任意の実数 x について， $2x^2-8x+9>0$ なので $2x^2-8x+9\geq 0$ です[5]：

任意の実数 x について　$2x^2-8x+9\geq 0$ ．



よって，総ての実数が不等式 $2x^2-8x+9\geq 0$ の解になります．実数 x が何であっても $2x^2-8x+9>0$ ですから， $2x^2-8x+9\leq 0$ となる実数 x はありません；つまり不等式 $2x^2-8x+9\leq 0$ の解はありません．同様に，実数 x が何であっても $2x^2-8x+9\geq 0$ ですから， $2x^2-8x+9<0$ となる実数 x はありません；つまり不等式 $2x^2-8x+9<0$ の解はありません．　終

例題　変数 u に関する不等式 $2u^2>6u-5$ 及び $2u^2\leq 6u-5$ を解く．

〔解説〕 $2u^2-(6u-5)$ を平方完成する：

$$2u^2-(6u-5)=2u^2-6u+5=2(u^2-3u)+5=2\left(u^2-3u+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{2}+5$$
$$=2\left(u-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ .$$

u がどんな実数でも， $\left(u-\dfrac{3}{2}\right)^2\geq 0$ なので， $2\left(u-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{1}{2}>0$ ，よって $2u^2-(6u-5)>0$ なので， $2u^2>6u-5$ ．

u がどんな実数でも $2u^2>6u-5$ なので，総ての実数が不等式 $2u^2>6u-5$ の解である．また，u がどんな実数でも $2u^2>6u-5$ なので， $2u^2\leq 6u-5$ となる実数 u はない，つまり不等式 $2u^2\leq 6u-5$ の解はない．　終

問題 5.8.5　変数 x に関する以下の不等式を解きなさい．

(1) $\dfrac{2x^2+1}{5}>\dfrac{x}{2}$ ．　　(2) $2(x+1)^2\leq x$ ．

定数 a,b,c は実数で $a>0$ とします．変数 x に関する2次不等式

$$ax^2+bx+c<0\ ,\quad ax^2+bx+c\leq 0\ ,\quad ax^2+bx+c>0\ ,\quad ax^2+bx+c\geq 0$$

の解法をまとめます．

まず $b^2-4ac>0$ とします．定理3.4より2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ には異なる2つの実数解 α,β があります．2次式の因数分解の公式（3.5節）より

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)\ .$$

この因数分解された2次式 $a(x-\alpha)(x-\beta)$ の値の符号を調べます． $\alpha<\beta$ とします． $a>0$ に注意して下さい．

x の値	$x<\alpha$	$x=\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x=\beta$	$\beta<x$
$x-\alpha$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\beta$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$a(x-\alpha)(x-\beta)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

この表から次のことが分かります：実数 a,α,β について， $a>0$ ， $\alpha<\beta$ のとき，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ を解くと　$\alpha<x<\beta$ ，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$ を解くと　$\alpha\leq x\leq\beta$ ，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$ を解くと　$x<\alpha$ または $x>\beta$ ，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$ を解くと　$x\leq\alpha$ または $x\geq\beta$ ．

次に $b^2-4ac=0$ とします．定理3.4より x に関する2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 α は実数の重解です．2次式の因数分解の公式（3.5節）より

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2\ .$$

$a>0$ なので，総ての実数 x について $a(x-\alpha)^2\geq 0$ ；従って更に， $a(x-\alpha)^2<0$ となる実数 x はありません．よって，

総ての実数が x に関する不等式 $a(x-\alpha)^2\geq 0$ の解である；

x に関する不等式 $a(x-\alpha)^2<0$ の解はない．

また， $a>0$ なので，

$$a(x-\alpha)^2\leq 0 \iff (x-\alpha)^2\leq 0 \iff x-\alpha=0 \iff x=\alpha\ ,$$
$$a(x-\alpha)^2>0 \iff (x-\alpha)^2>0 \iff x-\alpha\neq 0 \iff x\neq\alpha\ ;$$

故に，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)^2\leq 0$ を解くと　$x=\alpha$ ，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)^2>0$ を解くと　$x\neq\alpha$ ．

最後に $b^2-4ac<0$ とします．加えて $a>0$ なので，定理5.2より，

任意の実数 x について　$ax^2+bx+c>0$ ，

任意の実数 x について　$ax^2+bx+c\geq 0$ ；

従ってまた，

$ax^2+bx+c\leq 0$ となる実数 x はない，

$ax^2+bx+c<0$ となる実数 x はない．

故に，

総ての実数が x に関する不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解である；

総ての実数が x に関する不等式 $ax^2+bx+c\geq 0$ の解である；

x に関する不等式 $ax^2+bx+c\leq 0$ の解はない；

x に関する不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解はない．

[5] 任意の実数 a,b について，$a>b$ ならば $a\geq b$ です（定理1.5.1）．