

§5.3 根号・絶対値記号が現れる不等式

定理5.1.7を思い起こして下さい：任意の実数 a と b について、 $a^2 < b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば、 $a < b$.

例題 3 と $\sqrt{7}$ との大小関係を調べる.

$$3^2 = 9, \quad \sqrt{7}^2 = 7. \quad \sqrt{7}^2 < 3^2 \text{ なので, } \sqrt{7} < 3. \quad \text{終}$$

問題 5.3.1 7 と $4\sqrt{3}$ との大小関係を調べなさい.

問題 5.3.2 $\frac{13}{3}$ と $3\sqrt{2}$ との大小関係を調べなさい.

一般的に次の定理が成り立ちます.

定理 5.3.1 0 以上の実数 a, b について,

$$a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b},$$

$$a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}.$$

証明 例として “ $a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$ ” を証明する. $\sqrt{a} \geq 0$, $\sqrt{b} \geq 0$. また、定理1.6.2より、 $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{b^2} = b$. $a < b$ ならば、 $\sqrt{a^2} < \sqrt{b^2}$, 定理5.1.7より $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. 逆に、 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ならば、定理5.1.6より $\sqrt{a^2} < \sqrt{b^2}$ つまり $a < b$. (証明終り)

定理1.6.3を思い起こして下さい： $a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = -a$.

例題 $(\sqrt{7}-3)^2$ を計算する. その結果を用いて $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$ を計算する.

$$(\sqrt{7}-3)^2 = \sqrt{7}^2 - 2 \cdot 3\sqrt{7} + 3^2 = 7 - 6\sqrt{7} + 9 = 16 - 6\sqrt{7}.$$

$7 < 3^2$ なので $\sqrt{7} < \sqrt{3^2} = 3$, よって $\sqrt{7}-3 < 0$ なので,

$$\sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} = -(\sqrt{7}-3) = 3-\sqrt{7}. \quad \text{終}$$

問題 5.3.3 $(2-\sqrt{5})^2$ を計算し、その結果を用いて $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ を計算しなさい.

実数 a について、例えば $a=5$ のとき、 $|a|=|5|=5$ なので $|a|=a$ です；また例えば $a=-3$ のとき、 $|a|=|-3|=3$ なので $|a| > a$ です. このように、 $|a|=a$ となる場合と $|a| > a$ となる場合とがあります；両方の場合を併せると $|a| \geq a$ です.

定理 5.3.2 任意の実数 a について $a \leq |a|$.

証明 定理1.7.4より $|a|^2 = a^2$ なので、定理1.5.1より $|a|^2 \geq a^2$; 更に $|a| \geq 0$ なので、定理5.1.7より $|a| \geq a$. (証明終り)

実数 a と b について、

$$\text{例えば } a=5, b=3 \text{ のとき } |a+b|=8=|a|+|b|,$$

$$\text{例えば } a=5, b=-3 \text{ のとき } |a+b|=2 < |a|+|b|,$$

$$\text{例えば } a=-5, b=3 \text{ のとき } |a+b|=2 < |a|+|b|,$$

$$\text{例えば } a=-5, b=-3 \text{ のとき } |a+b|=8=|a|+|b|.$$

このように、 $|a+b|=|a|+|b|$ または $|a+b| < |a|+|b|$ なので、 $|a+b| \leq |a|+|b|$.

定理 5.3.3 (三角不等式) 任意の実数 a と b について $|a+b| \leq |a|+|b|$.

証明

$$\begin{aligned} (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = 2|ab| - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab). \end{aligned}$$

定理5.3.2より $|ab| \geq ab$ なので $|ab| - ab \geq 0$, よって $2(|ab| - ab) \geq 0$ なので、

$$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \geq 0,$$

$$(|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2.$$

$|a| \geq 0$, $|b| \geq 0$ より $|a|+|b| \geq 0$. $(|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2$ かつ $|a|+|b| \geq 0$ なので、定理5.1.7より $|a|+|b| \geq |a+b|$. (証明終り)

問題 5.3.4 三角不等式の証明に倣って次のことを証明しなさい：任意の実数 a と b について $|a-b| \geq |a|-|b|$.

例えば、実数 x について、 $|x| < 3$ となることは、 x の値が -3 より大きく 3 より小さいことつまり $-3 < x < 3$ となることです：

$$|x| < 3 \iff -3 < x < 3.$$

また例えば、実数 x について、 $|x| > 3$ となることは、 x の値が -3 より小さいかまたは 3 より大きいことです：

$$|x| > 3 \iff x < -3 \text{ または } x > 3.$$

一般的に次の定理が成り立ちます.

定理 5.3.4 実数 a と b について、

$$|a| < b \iff -b < a < b,$$

$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b.$$

証明 例として “ $|a| < b \iff -b < a < b$ ” を証明する.

まず、 $|a| < b$ と仮定する. 定理5.3.2より $a \leq |a|$, この不等式と仮定 $|a| < b$ より $a < b$. また、定理5.3.2と定理1.7.5とより $-a \leq |-a| = |a|$, この不等式と仮定 $|a| < b$ より $-a < b$; 従って $-b < a$. $a < b$ かつ $-b < a$ なので、 $-b < a < b$.

逆に、 $-b < a < b$ と仮定する. $a \geq 0$ のときと $a < 0$ のときの場合分けする. $a \geq 0$ のときは、定理1.7.1より $a = |a|$, 仮定より $a < b$ なので $|a| < b$. $a < 0$ のときは、定理1.7.1より $|a| = -a$, また仮定より $-b < a$ なので $-a < b$, 従って $|a| < b$. つまりどちらのときも $|a| < b$. (証明終り)

定理 5.3.5 実数 a と b について、

$$|a| > b \iff a > b \text{ または } a < -b;$$

$$|a| \geq b \iff a \geq b \text{ または } a \leq -b.$$

証明 例として “ $|a| > b \iff a > b \text{ または } a < -b$ ” を証明する.

$|a| > b$ と仮定する. 定理1.5.2より、 $a \geq 0$ または $a < 0$. $a \geq 0$ のとき、定理1.7.1より $|a| = a$ なので、仮定 $|a| > b$ より $a > b$. $a < 0$ のとき、定理1.7.1より $|a| = -a$ なので、仮定 $|a| > b$ より $-a > b$ よって $a < -b$. 従って $a > b$ または $a < -b$.

逆に、 $a > b$ または $a < -b$ と仮定する. $a > b$ のとき、定理5.3.2より $|a| \geq a$ なので、定理1.5.1より $|a| > b$. $a < -b$ のとき、 $b < -a$, 定理5.3.2と定理1.7.5とより $-a \leq |-a| = |a|$ なので、定理1.5.1より $b < |a|$. 従って、 $a > b$ のときも $a < -b$ のときも、 $|a| > b$. (証明終り)

0 以上の実数 a と b とに対して、 $\frac{a+b}{2}$ を a と b との相加平均といい、 \sqrt{ab} を a と b との相乗平均といいます. 相加平均と相乗平均の大小関係について、次の定理が成り立ちます.

定理 5.3.6 $a \geq 0$, $b \geq 0$ である任意の実数 a と b について $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; 等号が成り立つのは $a=b$ のときに限る.

証明 $a \geq 0$, $b \geq 0$ より $ab \geq 0$, 従って $\sqrt{ab^2} = ab$ なので、

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab^2} &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - ab = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(a-b)^2. \end{aligned}$$

$(a-b)^2 \geq 0$ より $\frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$ なので、 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab^2} \geq 0$, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \sqrt{ab^2}$,

$a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ なので $\frac{a+b}{2} \geq 0$. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \sqrt{ab^2}$ かつ $\frac{a+b}{2} \geq 0$ なので、

定理5.1.7より、 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab^2} = \frac{1}{4}(a-b)^2$ より、 $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ のとき、 $\frac{1}{4}(a-b)^2 = 0$, 従って $a=b$. 逆に $a=b$ のとき、 $\frac{a+b}{2} = \frac{a+a}{2} = a$, $a \geq 0$ なので $\sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a$, 従って $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$. 故に、 $a=b$ のときに限り $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$. (証明終り)

例題 任意の正の実数 x について $\frac{x}{5} + \frac{45}{x} \geq 6$ となることを示し、等号が成り立つ条件を調べなさい.

【方針】 相加平均と相乗平均との大小関係を用いる.

【解答】 $\frac{x}{5} \geq 0$ かつ $\frac{45}{x} \geq 0$ なので、相加平均と相乗平均との大小関係より

$$\frac{\frac{x}{5} + \frac{45}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{5} \cdot \frac{45}{x}} = \sqrt{9} = 3.$$

従って $\frac{x}{5} + \frac{45}{x} \geq 6$. 等号が成り立つ条件は、 $\frac{x}{5} = \frac{45}{x}$, つまり $x = \sqrt{5 \cdot 45} = \sqrt{5^2 \cdot 3^2} = 15$. (証明終り)

問題 5.3.5 任意の正の実数 x について $\frac{x}{45} + \frac{20}{x} \geq \frac{4}{3}$ となることを示し、等号が成り立つ条件を調べなさい.