

## §5.2 2次不等式の証明

変数  $x$  に関する不等式が次の何れかの形に整理できるとき、その不等式を  $x$  に関する2次不等式といいます：

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \quad ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0;$$

ここで定数  $a, b, c$  は実数を表し  $a \neq 0$  です。2次不等式の証明とは目標の2次不等式を導くことです。そのためによく用いられるのが定理1.5.10です：任意の実数  $A$  について  $A^2 \geq 0$ 。

**例解** 次のことを示します：任意の実数  $x$  について  $x^2 - 6x + 11 > 0$ 。この不等式を導くために左辺の2次式を平方完成します。

$$x^2 - 6x + 11 = (x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9 + 11 = (x - 3)^2 + 2.$$

任意の実数  $x$  について、 $(x - 3)^2 \geq 0$  ですから

$$(x - 3)^2 + 2 \geq 2,$$

$2 > 0$  ですから

$$(x - 3)^2 + 2 > 0,$$

$(x - 3)^2 + 2 = x^2 - 6x + 11$  ですから

$$x^2 - 6x + 11 > 0.$$

こうして目標の不等式  $x^2 - 6x + 11 > 0$  が導かれました。 終

実数  $a$  と  $b$  について、 $a - b \geq 0$  ならば、法則1.5.3より  $a - b + b \geq 0 + b$  つまり  $a \geq b$  です。同様に、 $a - b > 0$  ならば  $a > b$  です。このように、任意の実数  $a$  と  $b$  について次のようになります：

$$a - b \geq 0 \text{ ならば, } a \geq b, \quad b \leq a;$$

$$a - b > 0 \text{ ならば, } a > b, \quad b < a.$$

このことより次のことが分かります：

不等式  $A \geq B$ ,  $B \leq A$  を導くためには不等式  $A - B \geq 0$  を導けばよい；

不等式  $A > B$ ,  $B < A$  を導くためには不等式  $A - B > 0$  を導けばよい。

**例題** 次のことを示す：任意の実数  $x$  について  $2x^2 + 14 > 12x - 5$ 。

**方針** 不等式  $2x^2 + 14 > 12x - 5$  を導くために不等式  $2x^2 + 14 - (12x - 5) > 0$  を導く；そのために左辺の2次式  $2x^2 + 14 - (12x - 5)$  を平方完成する。

**解答**

$$\begin{aligned} 2x^2 + 14 - (12x - 5) &= 2x^2 - 12x + 19 = 2(x^2 - 6x) + 19 \\ &= 2(x^2 - 6x + 3^2 - 9) + 19 = 2(x - 3)^2 - 18 + 19 \\ &= 2(x - 3)^2 + 1. \end{aligned}$$

任意の実数  $x$  について、 $(x - 3)^2 \geq 0$  なので  $2(x - 3)^2 \geq 0$ ，よって  $2(x - 3)^2 + 1 \geq 1$ ；

更に  $1 > 0$  なので

$$2(x - 3)^2 + 1 > 0,$$

$2(x - 3)^2 + 1 = 2x^2 + 14 - (12x - 5)$  なので、

$$2x^2 + 14 - (12x - 5) > 0,$$

$$2x^2 + 14 > 12x - 5.$$

故に、任意の実数  $x$  について  $2x^2 + 14 > 12x - 5$ 。 終

**問題 5.2.1** 次のことを示しなさい：任意の実数  $x$  について  $5x^2 - 8x + 2 > 2x^2 - 5$ 。

このように、2次式の平方完成によって次の定理が導かれます。

**定理 5.2** 定数  $a, b, c$  は実数で  $a \neq 0$  とする。

$a > 0$  かつ  $b^2 - 4ac < 0$  ならば、任意の実数  $x$  について  $ax^2 + bx + c > 0$ 。

$a < 0$  かつ  $b^2 - 4ac < 0$  ならば、任意の実数  $x$  について  $ax^2 + bx + c < 0$ 。

**証明** “ $a > 0$  かつ  $b^2 - 4ac < 0$  ならば、任意の実数  $x$  について  $ax^2 + bx + c > 0$ ”

であることを証明する。

$a > 0$  かつ  $b^2 - 4ac < 0$  と仮定する。 $x$  の2次式  $ax^2 + bx + c$  を平方完成する：

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left\{x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

$x$  を任意の実数とする。 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$  なので、仮定  $a > 0$  より  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ，

よって

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

仮定  $a > 0$  かつ  $b^2 - 4ac < 0$  より  $\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$ ，よって  $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$  なので、

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0.$$

故に、任意の実数  $x$  について、

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0.$$

(証明終り)

不等式  $A \geq B$  を証明したとき、等号が成り立つ（つまり  $A = B$  となる）条件を調べる場合があります。

**例題** 任意の実数  $y$  について  $3y^2 - 7y + 8 \geq 5y - 4$  であることを示し、等号が成り立つ（つまり  $3y^2 - 7y + 8 = 5y - 4$  となる）条件を調べる。

**方針** 不等式  $3y^2 - 7y + 8 \geq 5y - 4$  を導くために不等式  $3y^2 - 7y + 8 - (5y - 4) \geq 0$  を導く；そのために左辺の2次式  $3y^2 - 7y + 8 - (5y - 4)$  を平方完成する。

**解答**

$$\begin{aligned} 3y^2 - 7y + 8 - (5y - 4) &= 3y^2 - 12y + 12 = 3(y^2 - 4y) + 12 \\ &= 3(y^2 - 4y + 2^2 - 4) + 12 = 3(y - 2)^2 - 12 + 12 \\ &= 3(y - 2)^2. \end{aligned}$$

任意の実数  $y$  について、 $3(y - 2)^2 \geq 0$  なので

$$3y^2 - 7y + 8 - (5y - 4) \geq 0,$$

従って  $3y^2 - 7y + 8 \geq 5y - 4$ 。

等号が成り立つ条件は、 $3y^2 - 7y + 8 = 5y - 4$ ， $3y^2 - 7y + 8 - (5y - 4) = 0$ ，

$3(y - 2)^2 = 0$ ， $y - 2 = 0$ ， $y = 2$ 。故に  $y = 2$  のときに限り  $3y^2 - 7y + 8 = 5y - 4$ 。 終

**問題 5.2.2** 任意の実数  $t$  について  $\frac{3}{4}t^2 + t + 2 \geq \frac{1}{2}t^2 - 2t - 7$  となることを示し、等号が成り立つ条件を調べなさい。

**例題** 次のことを示しなさい： $3x^2 + 5 \leq 7x$  である実数  $x$  は無い。

**方針** “ $3x^2 + 5 \leq 7x$  である実数  $x$  は無い”を示すために、“任意の実数  $x$  について  $3x^2 + 5 > 7x$ ”を示す。

**解説**

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5 - 7x &= 3\left(x^2 - \frac{7}{3}x\right) + 5 = 3\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{7}{6}x + \left(\frac{7}{6}\right)^2\right\} - \frac{49}{12} + 5 \\ &= 3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

任意の実数  $x$  について、 $\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 \geq 0$  なので、 $3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} \geq \frac{11}{12} > 0$ ，

$3x^2 + 5 - 7x > 0$ ，よって  $3x^2 + 5 > 7x$ 。故に  $3x^2 + 5 \leq 7x$  である実数  $x$  は無い。 終

**問題 5.2.3** 次のことを示しなさい： $3x^2 + 4 \leq 5x$  である実数  $x$  は無い。

2個の変数が現れる不等式を考えます。

**例題** 次のことを示す：任意の実数  $x$  と  $y$  について  $2x^2 + 3y^2 > 3x + 5y - 4$ 。

**解説**  $2x^2 + 3y^2 - (3x + 5y - 4)$  を  $x$  および  $y$  について平方完成する。

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3y^2 - (3x + 5y - 4) &= 2x^2 - 3x + 3y^2 - 5y + 4 \\ &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 3\left(y^2 - \frac{5}{3}y\right) + 4 \\ &= 2\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3^2}{4^2}\right\} + 3\left\{y^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}y + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{5^2}{6^2}\right\} + 4 \\ &= 2\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right\} - \frac{9}{8} + 3\left\{y^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}y + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right\} - \frac{25}{12} + 4 \\ &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(y - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{19}{24}. \end{aligned}$$

任意の実数  $x$  と  $y$  について、 $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \geq 0$  かつ  $\left(y - \frac{5}{6}\right)^2 \geq 0$  なので、

$$2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(y - \frac{5}{6}\right)^2 \geq 0,$$

$$2x^2 + 3y^2 - (3x + 5y - 4) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(y - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{19}{24} \geq \frac{19}{24} > 0,$$

よって  $2x^2 + 3y^2 > 3x + 5y - 4$ 。 終

**問題 5.2.4** 次のことを示しなさい：任意の実数  $x$  と  $y$  について  $3x^2 + 4y^2 > 5x - 3y - 3$ 。