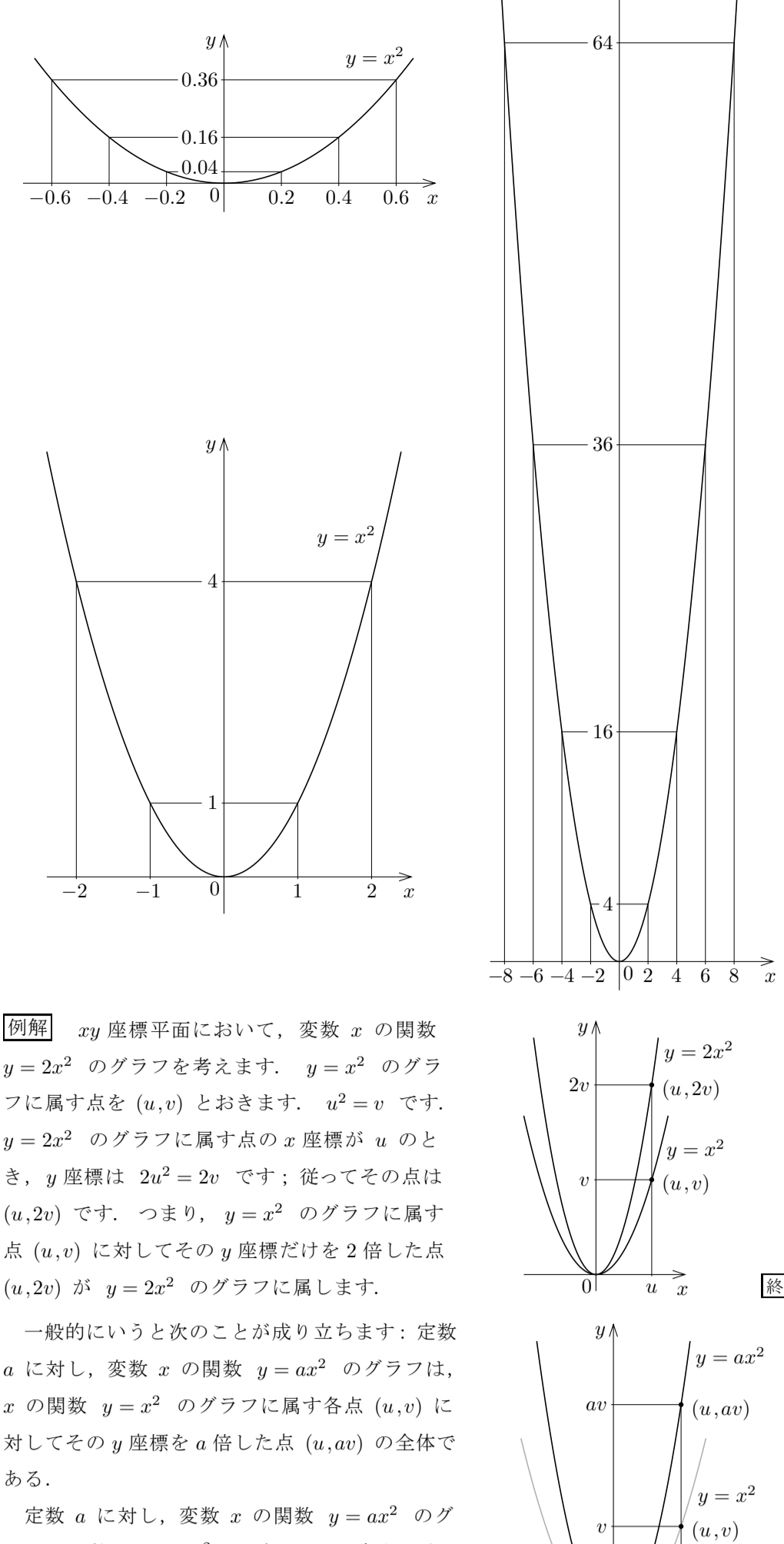


§4.7 2次関数のグラフ

まず、尺度が異なる3通りの xy 座標平面において、変数 x の2次関数 $y=x^2$ のグラフを描いてみます。



例解 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y=2x^2$ のグラフを考えます。

$y=x^2$ のグラフに属す点を (u,v) とおきます。 $u^2=v$ です。 $y=2x^2$ のグラフに属す点の x 座標が u のとき、 y 座標は $2u^2=2v$ です；従ってその点は $(u,2v)$ です。つまり、 $y=x^2$ のグラフに属す点 (u,v) に対してその y 座標だけを2倍した点 $(u,2v)$ が $y=2x^2$ のグラフに属します。

一般的にいうと次のことが成り立ちます：定数 a に対し、変数 x の関数 $y=ax^2$ のグラフは、 x の関数 $y=x^2$ のグラフに属す各点 (u,v) に対してその y 座標を a 倍した点 (u,av) の全体である。

定数 a に対し、変数 x の関数 $y=ax^2$ のグラフと関数 $y=-ax^2$ のグラフとを考えます。関数 $y=ax^2$ のグラフは、関数 $y=x^2$ のグラフに属す各点 (u,v) の y 座標だけを a 倍した点 (u,av) の全体です；また、関数の $y=-ax^2$ のグラフは、関数 $y=x^2$ のグラフに属す各点 (u,v) の y 座標だけを $-a$ 倍した点 $(u,-av)$ の全体です。 $y=-ax^2$ のグラフに属す点 $(u,-av)$ は $y=ax^2$ のグラフに属す点 (u,av) と x 軸に関して対称です。従って、関数 $y=-ax^2$ のグラフは関数 $y=ax^2$ のグラフと x 軸に関して対称です。

xy 座標平面において方程式 $y=ax^2$ が表す図形を**放物線**(parabola)といいます。各放物線には唯一本の対称軸があります。各放物線の対称軸をその放物線の軸といいます。また、各放物線とその対称軸との共有点をその放物線の頂点といいます。 xy 座標平面において、変数 x の2次関数 $y=ax^2$ のグラフの対称軸は y 軸であり、頂点は原点 $(0,0)$ です。

例解 xy 座標平面において変数 x の2次関数 $y=2x^2$ のグラフを x の軸の向きに3だけ y 座標の向きに1だけ平行移動させた放物線を P とおきます(右図参照)。

関数 $y=2x^2$ のグラフの点は、 x 座標を t とすると y 座標は $2t^2$ ですから、 $(t,2t^2)$ となります。 P の各点 (x,y) は、元の関数 $y=2x^2$ のグラフのある点 $(t,2t^2)$ を x の軸の向きに3だけ y 座標の向きに1だけ移動させた点 $(t+3,2t^2+1)$ です；

$$(x,y) = (t+3, 2t^2+1).$$

よって

$$x = t+3 \text{ かつ } y = 2t^2+1.$$

等式 $x = t+3$ より $t = x-3$ 、これを等式 $y = 2t^2+1$ に代入すると $y = 2(x-3)^2+1$ 。つまり、2次関数 $y=2x^2$ のグラフを x の軸の向きに3だけ y 座標の向きに1だけ平行移動させた放物線 P は関数 $y=2(x-3)^2+1$ のグラフです。

例題 xy 座標平面において変数 x の2次関数 $y=3x^2$ のグラフを x 軸の向きに2だけ y 軸の向きに-5だけ平行移動させた放物線 P をグラフとする関数を表す方程式を導く。

【解説】放物線 P の各点 (x,y) は、2次関数 $y=3x^2$ のグラフの点 $(t,3t^2)$ (t はある実数)を x の軸の向きに2だけ y 軸の向きに-5だけ平行移動させた点 $(t+2,3t^2-5)$ なので、 $(x,y) = (t+2, 3t^2-5)$ 。よって

$$x = t+2 \text{ かつ } y = 3t^2-5.$$

$x = t+2$ より $t = x-2$ ；これを $y = 3t^2-5$ に代入すると $y = 3(x-2)^2-5$ 、右辺を降幂の順に整理すると $y = 3x^2-12x+7$ 。故に P をグラフとする関数は $y = 3x^2-12x+7$ である。

問題 4.7.1 xy 座標平面において変数 x の2次関数 $y=4x^2$ のグラフを x の軸の向きに-2だけ y 軸の向きに-3だけ平行移動させた放物線 P をグラフとする関数を表わす方程式を導きなさい(導く過程を記しなさい)。

例題 xy 座標平面において変数 x の2次関数 $y=2x^2$ のグラフを頂点が $(-3,4)$ になるように平行移動させた放物線 P をグラフとする関数を表す方程式を導く。

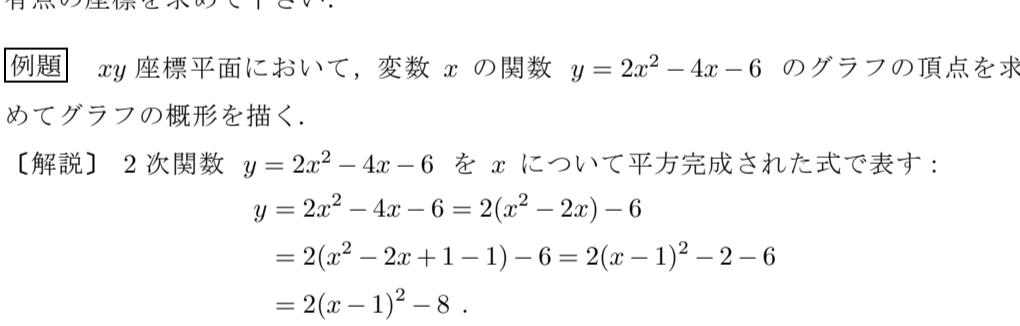
【解説】関数 $y=2x^2$ のグラフの頂点 $(0,0)$ が点 $(-3,4)$ に移動する平行移動で、各点は x の軸の向きに-3だけ y 軸の向きに4だけ平行移動する。放物線 P の各点 (x,y) は、関数 $y=2x^2$ のグラフの点 $(t,2t^2)$ (t はある実数)を x の軸の向きに-3だけ y 軸の向きに4だけ平行移動させた点 $(t-3,2t^2+4)$ なので、 $(x,y) = (t-3, 2t^2+4)$ 。よって

$$x = t-3 \text{ かつ } y = 2t^2+4.$$

$x = t-3$ より $t = x+3$ 。これを $y = 2t^2+4$ に代入すると、 $y = 2(x+3)^2+4$ 、右辺を降幂の順に整理すると $y = 2x^2+12x+22$ 。故に P をグラフとする関数は $y = 2x^2+12x+22$ である。

問題 4.7.2 xy 座標平面において変数 x の2次関数 $y=3x^2$ のグラフを頂点が $(4,2)$ になるように平行移動させた放物線 P をグラフとする関数を表わす方程式を導きなさい(導く過程を記しなさい)。

一般的に述べます。定数 a, p, q ($a \neq 0$)に対し、 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y=a(x+p)^2+q$ のグラフは、 x の関数 $y=ax^2$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた図形です。関数 $y=ax^2$ のグラフの頂点は原点 $(0,0)$ でした。従って、 $y=a(x+p)^2+q$ のグラフの頂点は、原点 $(0,0)$ を x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた点 $(-p,q)$ です。



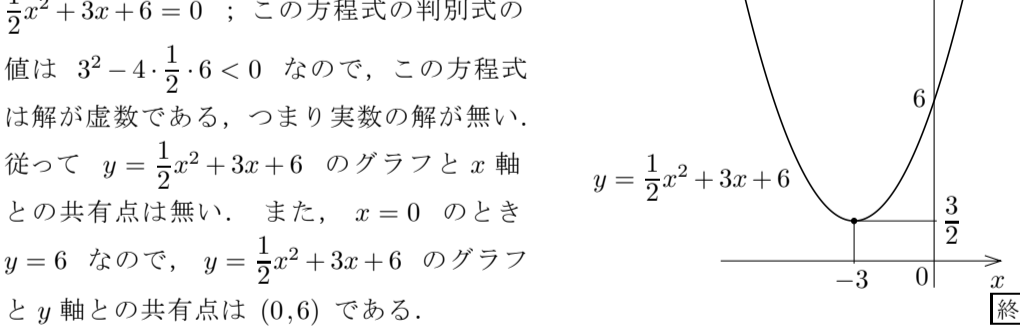
$a > 0$ のときの $y=a(x+p)^2+q$ のグラフ $a < 0$ のときの $y=a(x+p)^2+q$ のグラフ

このように、関数 $y=a(x+p)^2+q$ のグラフは、関数 $y=ax^2$ のグラフを平行移動させた放物線であり、頂点は $(-p,q)$ です。

定理 4.7 定数 a, p, q ($a \neq 0$)に対し、 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y=a(x+p)^2+q$ のグラフは、関数 $y=ax^2$ のグラフを、頂点が $(-p,q)$ になるように平行移動させた放物線である。

変数 x の2次関数 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c は定数で $a \neq 0$)を x について平方完成された式で表すと $y=a(x+p)^2+q$ (p, q は定数)となります。 xy 座標平面において、 $y=a(x+p)^2+q$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動させた放物線ですから、結局、

$y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動させた放物線です。故に、 $y=ax^2+bx+c$ のグラフの形と向きとは a の値だけで決まります。定数 a について $a > 0$ のとき、変数 x の2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは上に開いた形の放物線になります：この放物線の状態を下に凸といいます。また、定数 a について $a < 0$ のとき、変数 x の2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは下に開いた形の放物線になります：この放物線の状態を上凸といいます。



座標平面において関数のグラフを描くときは、できるだけそのグラフと座標軸の共有点の座標を求めて下さい。

例題 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y=2x^2-4x-6$ のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く。

【解説】2次関数 $y=2x^2-4x-6$ を x について平方完成された式で表す：

$$y = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x) - 6 = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 6 = 2(x-1)^2 - 2 - 6 = 2(x-1)^2 - 8.$$
 従って関数 $y=2x^2-4x-6$ のグラフの頂点は $(1,-8)$ である。
 $y = 2x^2 - 4x - 6$ より、 $y = 0$ とすると、 $2x^2 - 4x - 6 = 0$ 、 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 、 $(x+1)(x-3) = 0$ 、よって $x = -1, 3$ 。従って $y = 2x^2 - 4x - 6$ のグラフと x 軸との共有点は $(-1,0)$ と $(3,0)$ 。また、 $x = 0$ のとき $y = -6$ なので、 $y = 2x^2 - 4x - 6$ のグラフと y 軸との共有点は $(0,-6)$ である。

問題 4.7.3 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y=2x^2-8x+\frac{7}{2}$ のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描きなさい。

例題 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+6$ のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く。

【解説】2次関数 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+6$ を x について平方完成された式で表す：

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 = \frac{1}{2}(x^2 + 6x) + 6 = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9 - 9) + 6 = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{9}{2} + 6 = \frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{3}{2}.$$
 従って関数 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+6$ のグラフの頂点は $(-3, \frac{3}{2})$ である。
 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$ より、 $y = 0$ のとき $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 = 0$ ；この方程式の判別式の値は $3^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 < 0$ なので、この方程式は解が虚数である、つまり実数の解が無い。従って $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$ のグラフと x 軸との共有点は無い。また、 $x = 0$ のとき $y = 6$ なので、 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$ のグラフと y 軸との共有点は $(0,6)$ である。

問題 4.7.4 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y=\frac{2}{3}x^2+4x+7$ のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描きなさい。

例題 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y=-x^2+4x-4$ のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く。

【解説】2次関数 $y=-x^2+4x-4$ を x について平方完成された式で表す：

$$y = -x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x) - 4 = -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4 = -(x-2)^2 + 4 - 4 = -(x-2)^2.$$
 従って関数 $y=-x^2+4x-4$ のグラフの頂点は $(2,0)$ である。
 $y = -x^2 + 4x - 4$ より、 $y = 0$ のとき、 $-x^2 + 4x - 4 = 0$ 、 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 、 $(x-2)^2 = 0$ 、よって $x = 2$ 。従って $y = -x^2 + 4x - 4$ のグラフと x 軸との共有点は $(2,0)$ 。また、 $x = 0$ のとき $y = -4$ なので、 $y = -x^2 + 4x - 4$ のグラフと y 軸との共有点は $(0,-4)$ である。

問題 4.7.5 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y=-2x^2+6x-\frac{9}{2}$ のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描きなさい。

定理4.7より次のことが成り立ちます：定数 a, p, q ($a \neq 0$)に対して、 xy 座標平面において、関数 $y=ax^2$ のグラフを点 (p,q) が頂点となるように平行移動させた放物線は、関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフである。

例題 変数 x の2次関数 $y=f(x)$ について、 xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=3x^2$ のグラフを平行移動させた放物線であり、その頂点は $(2,4)$ であるとします。 $f(x)$ の値を表す x の2次式を求める(降幂の順に整理する)。

【解説】2次関数 $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=3x^2$ のグラフを平行移動させた放物線であり、その頂点が $(2,4)$ なので、 $f(x) = 3(x-2)^2 + 4$ ；右辺を降幂の順に整理すると $f(x) = 3x^2 - 12x + 16$ 。

問題 4.7.6 変数 x の2次関数 $y=f(x)$ について、 xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを平行移動させた放物線であり、その頂点は $(-4,3)$ であるとします。 $f(x)$ の値を表す x の2次式を求めなさい(降幂の順に整理しなさい)。

例題 変数 x の2次関数 $y=f(x)$ について、 xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフは点 $(2,-5)$ を頂点とする放物線であり、点 $(6,7)$ が $y=f(x)$ のグラフに属すとします。 $f(x)$ の値を表す x の2次式を求める(降幂の順に整理する)。

【解説】2次関数 $y=f(x)$ のグラフは点 $(2,-5)$ を頂点とする放物線なので、ある定数 a をとると $y=a(x-2)^2-5$ 。点 $(6,7)$ が関数 $y=a(x-2)^2-5$ のグラフに属するので、 $7 = a(6-2)^2 - 5$ 、 $16a = 12$ 、 $a = \frac{3}{4}$ 。よって $f(x) = \frac{3}{4}(x-2)^2 - 5$ つまり $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x - 1$ 。

問題 4.7.7 変数 x の2次関数 $y=f(x)$ について、 xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフは点 $(6,-11)$ を頂点とする放物線であり、点 $(3,-5)$ が $y=f(x)$ のグラフに属すとします。 $f(x)$ の値を表す x の2次式を求めなさい(降幂の順に整理しなさい)。

定数 a, b, c ($a \neq 0$)に対して、 xy 座標平面において変数 x の2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは関数 $y=ax^2$ のグラフを平行移動させた放物線でした。

例題 変数 x の2次関数 $y=f(x)$ について、 xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=4x^2$ のグラフを平行移動させた放物線であり、点 $(2,-5)$ と $(3,6)$ とが $y=f(x)$ のグラフに属すとします。 $f(x)$ の値を表す x の2次式を求める(降幂の順に整理する)。

【解説】関数 $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=4x^2$ のグラフを平行移動させた放物線なので、ある定数 b, c をとると $f(x) = 4x^2 + bx + c$ 。点 $(2,-5)$ が関数 $y = 4x^2 + bx + c$ のグラフに属するので、 $-5 = 4 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$ よって $2b + c = -21$ 。点 $(3,6)$ が関数 $y = 4x^2 + bx + c$ のグラフに属するので、 $6 = 4 \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$ よって $3b + c = -30$ 。これらの方程式より、 $b = -9$ かつ $c = -3$ 。 $f(x) = 4x^2 + bx + c$ なので、 $f(x) = 4x^2 - 9x - 3$ 。

問題 4.7.8 変数 x の2次関数 $y=f(x)$ について、 xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=\frac{3}{4}x^2$ のグラフを平行移動させた放物線であり、点 $(4,1)$ と $(6,8)$ とが $y=f(x)$ のグラフに属すとします。 $f(x)$ の値を表す x の2次式を求めなさい(降幂の順に整理しなさい)。