

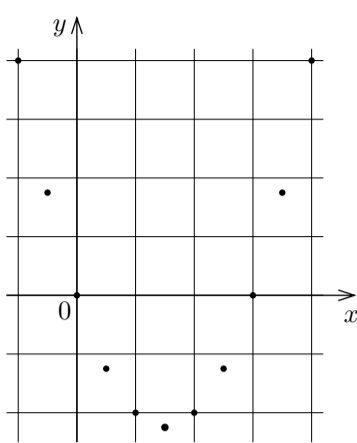
§4.3 関数のグラフ

例解 変数 x の関数 $y = x^2 - 3x$ のグラフを考えます。座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 3x$ のグラフとは、 $y = x^2 - 3x$ となる点 (x, y) の全体のことです。つまり、関数 $y = x^2 - 3x$ のグラフとは座標平面の点の集合

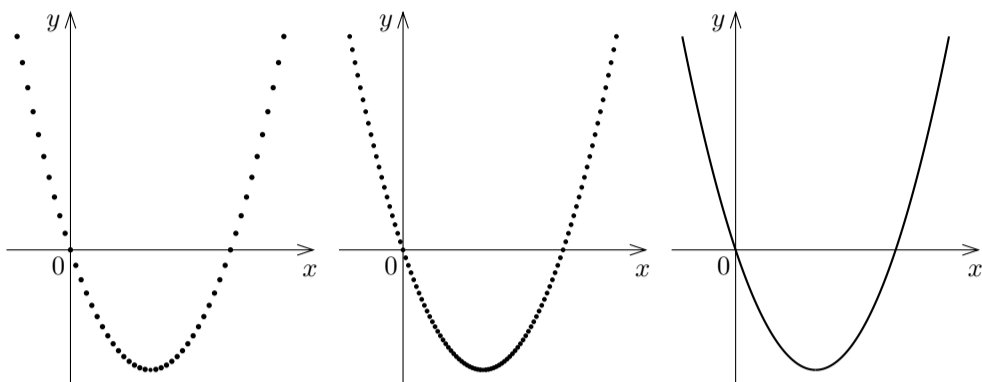
$$\{(x, y) \mid y = x^2 - 3x\}$$

のことです。 x 座標が $-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4$ のときの y 座標を計算して、グラフの点をとります。

x の値	$y = x^2 - 3x$ の値	対応するグラフの点
-1	4	$(-1, 4)$
-0.5	1.75	$(-0.5, 1.75)$
0	0	$(0, 0)$
0.5	-1.25	$(0.5, -1.25)$
1	-2	$(1, -2)$
1.5	-2.25	$(1.5, -2.25)$
2	-2	$(2, -2)$
2.5	-1.25	$(2.5, -1.25)$
3	0	$(3, 0)$
3.5	1.75	$(3.5, 1.75)$
4	4	$(4, 4)$



プロットする点を増やしていくと、点と点とがつながって曲線になっていきます。



このようにしてできる曲線が関数 $y = x^2 - 3x$ のグラフです。実数 a, b について次のようになります：

$$\begin{aligned} \text{点 } (a, b) \text{ が } y = x^2 - 3x \text{ のグラフに属す} &\iff (a, b) \in \{(x, y) \mid y = x^2 - 3x\} \\ &\iff b = a^2 - 3a. \end{aligned} \quad \text{終}$$

一般的に、 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = f(x)$ のグラフ (graph) とは、 $y = f(x)$ となる点 (x, y) の全体 $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$ のことです。ですから次のようになります。

変数 x の関数 $y = f(x)$ 及び実数 a, b について、

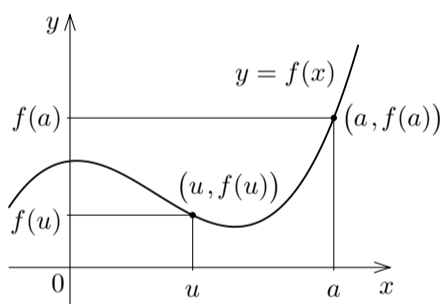
$$\begin{aligned} \text{点 } (a, b) \text{ が } y = f(x) \text{ のグラフに属す} &\iff (a, b) \in \{(x, y) \mid y = f(x)\} \\ &\iff b = f(a). \end{aligned}$$

例 xy 座標平面の3点 $(-1, 2)$ と $(1, -2)$ と $(2, 1)$ について、変数 x の関数 $y = x^2 - 3x$ のグラフに属すかどうか調べます。 xy 座標平面の点を (x, y) とおきます。 $(x, y) = (-1, 2)$ のとき、 $x^2 - 3x = 4$, $y = 2$ なので $x^2 - 3x \neq y$, よって点 $(-1, 2)$ は $y = x^2 - 3x$ のグラフに属しません。 $(x, y) = (1, -2)$ のとき、 $x^2 - 3x = -2$, $y = -2$ なので $x^2 - 3x = y$, よって点 $(1, -2)$ は $y = x^2 - 3x$ のグラフに属します。 $(x, y) = (2, 1)$ のとき、 $x^2 - 3x = -2$, $y = 1$ なので $x^2 - 3x \neq y$, よって点 $(2, 1)$ は $y = x^2 - 3x$ のグラフに属しません。 終

問題 4.3.1 xy 座標平面の以下の4点について、変数 x の関数 $y = x^3 - 5x$ のグラフに属すかどうか調べなさい。

- (1) $(-1, 6)$. (2) $(0, 3)$. (3) $(1, 4)$. (4) $(2, -2)$.

xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = f(x)$ のグラフに属す点で x 座標が a である点を求めます。グラフに属す点 (x, y) について、 $y = f(x)$ なので、 x 座標を a とすると、 $x = a$ より $y = f(a)$. つまり、関数 $y = f(x)$ のグラフの点で x 座標が a である点の y 座標は $f(a)$ です。



例題 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = 2x^2 - 4x$ のグラフに属す点で x 座標が 3 である点 P を求める。

点 $P = (x, y)$ について $y = 2x^2 - 4x$. $x = 3$ なので $y = 2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 = 6$. よって $P = (3, 6)$. 終

問題 4.3.2 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = 2x^3 - x^2 + 7x$ のグラフに属す点で x 座標が -2 である点 A を求めなさい。

xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = f(x)$ のグラフの点で y 座標が a である点を求めたいとします。グラフに属す点 (x, y) について、 $y = f(x)$ なので、 y 座標を a とすると、 $y = a$ より $a = f(x)$. この x に関する方程式の実数解が、関数 $y = f(x)$ のグラフの点で y 座標が a である点の x 座標です。

例題 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 7x + 6$ のグラフに属す点で y 座標が -4 である点 Q を求める。

点 $Q = (x, y)$ について $y = x^2 - 7x + 6$. $y = -4$ なので、 $-4 = x^2 - 7x + 6$, $x^2 - 7x + 10 = 0$, $(x - 2)(x - 5) = 0$, $x = 2$ または $x = 5$. よって、 $Q = (2, -4)$ または $Q = (5, -4)$. 終

問題 4.3.3 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 8x + 9$ のグラフに属す点で y 座標が -6 である点 P を求めなさい。

本書では、 xy 座標平面において、 x 座標及び y 座標は実数です。虚数は xy 座標平面の点の x 座標や y 座標になりません。

例題 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = 2x^2 - 5x + 7$ のグラフに属す点で y 座標が 3 である点 P を求める。

点 $P = (x, y)$ について $y = 2x^2 - 5x + 7$. $y = 3$ なので、 $3 = 2x^2 - 5x + 7$, $2x^2 - 5x + 4 = 0$; この x に関する2次方程式は、判別式の値が $(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 < 0$ なので、解が虚数である。虚数は x 座標にならないので、P の x 座標は無い。よって $y = 2x^2 - 5x + 7$ のグラフに属す点で y 座標が 3 である点 P は無い。 終

問題 4.3.4 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = 3x^2 - 7x + 6$ のグラフに属す点で y 座標が 1 である点 Q を求めなさい。