

## §4.10 関数のグラフの共有点

座標平面において、2つの関数のグラフの両方に属す点を、それらのグラフの**共有点**といいます。

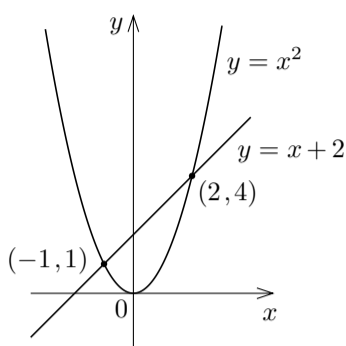
**例解**  $xy$ 座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = x^2$  のグラフと  $x$  の関数  $y = x + 2$  のグラフとの共有点を求めます。実数  $u, v$  について、4.3節で述べたように、

$$\begin{aligned} \text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフに属す} &\iff v = u^2, \\ \text{点 } (u, v) \text{ が } y = x + 2 \text{ のグラフに属す} &\iff v = u + 2; \end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{aligned} \text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフと } y = x + 2 \text{ のグラフとの共有点である} \\ \iff \text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフに属しかつ } y = x + 2 \text{ のグラフにも属す} \\ \iff v = u^2 \text{ かつ } v = u + 2. \end{aligned}$$

従って、 $y = x^2$  のグラフと  $y = x + 2$  のグラフとの共有点  $(u, v)$  を求めるには連立方程式  $v = u^2$  かつ  $v = u + 2$  を解きます。この連立方程式より  $u^2 = u + 2$  なので、 $u^2 - u - 2 = 0$ 、 $u = 2$  または  $u = -1$ 。  $v = u + 2$  なので、 $u = 2$  のとき  $v = 4$ 、 $u = -1$  のとき  $v = 1$ 。よって、 $(u, v) = (2, 4)$  または  $(u, v) = (-1, 1)$ 。故に、関数  $y = x^2$  のグラフと関数  $y = x + 2$  のグラフとの共有点は  $(2, 4)$  と  $(-1, 1)$  とです。



終

一般的に述べます。変数  $x$  の関数  $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$  及び実数  $u, v$  について、4.3節で述べたように、

$$\begin{aligned} \text{点 } (u, v) \text{ が } y = f(x) \text{ のグラフに属す} &\iff f(u) = v, \\ \text{点 } (u, v) \text{ が } y = g(x) \text{ のグラフに属す} &\iff g(u) = v; \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \text{点 } (u, v) \text{ が } y = f(x) \text{ のグラフと } y = g(x) \text{ のグラフとの共有点である} \\ \iff \text{点 } (u, v) \text{ は } y = f(x) \text{ のグラフに属しかつ } y = g(x) \text{ のグラフにも属す} \\ \iff v = f(u) \text{ かつ } v = g(u). \end{aligned}$$

このように、関数  $y = f(x)$  のグラフと関数  $y = g(x)$  のグラフとの共有点  $(x, y)$  は、連立方程式  $y = f(x)$  かつ  $y = g(x)$  の実数解の順序対です。

**例題**  $xy$ 座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = x^2 - x - 3$  のグラフと  $x$  の関数  $y = 2x^2 - 5x$  のグラフとの共有点を求める。

【解説】共有点  $(x, y)$  について、 $y = x^2 - x - 3$  かつ  $y = 2x^2 - 5x$  なので、

$$\begin{aligned} x^2 - x - 3 &= 2x^2 - 5x, \\ x^2 - 4x + 3 &= 0, \\ (x - 1)(x - 3) &= 0, \end{aligned}$$

よって  $x = 1$  または  $x = 3$ 。更に、 $y = x^2 - x - 3$  より、 $x = 1$  のとき  $y = -3$ 、 $x = 3$  のとき  $y = 3$ 。故に、関数  $y = x^2 - x - 3$  のグラフと関数  $y = 2x^2 - 5x$  のグラフとの共有点は  $(1, -3)$  と  $(3, 3)$  とである。

終

**問題 4.10.1**  $xy$ 座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = x^2 - 4x + 5$  のグラフと  $x$  の関数  $y = 3x^2 + x - 7$  のグラフとの共有点を求めなさい。

関数  $y = f(x)$  のグラフと関数  $y = g(x)$  のグラフとの共有点  $(x, y)$  は、連立方程式  $y = f(x)$  かつ  $y = g(x)$  の実数解の順序対です。ですから、この連立方程式の実数解が無いときは、 $y = f(x)$  のグラフと  $y = g(x)$  のグラフとの共有点もありません。

**例題**  $xy$ 座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = x^2 - 2x - 5$  のグラフと  $x$  の関数  $y = 2x^2 - 5x - 1$  のグラフとの共有点を求める。

【解説】共有点  $(x, y)$  について、 $y = x^2 - 2x - 5$  かつ  $y = 2x^2 - 5x - 1$  なので、

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 5 &= 2x^2 - 5x - 1, \\ x^2 - 3x + 4 &= 0. \end{aligned}$$

この  $x$  に関する2次方程式は、判別式が  $(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$  なので、実数解が無い。従って、関数  $y = x^2 - 2x - 5$  のグラフと関数  $y = 2x^2 - 5x - 1$  のグラフとの共有点はない。

終

**問題 4.10.2**  $xy$ 座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = x^2 - 2x + 1$  のグラフと  $x$  の関数  $y = 3x^2 - 7x + 5$  のグラフとの共有点を求めなさい。

**例題**  $xy$ 座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = \frac{2x - 6}{3x - 1}$  ( $x \neq \frac{1}{3}$ ) のグラフと  $x$  の関数  $y = \frac{x + 9}{4}$  のグラフとの共有点を求める。

共有点  $(x, y)$  について、 $y = \frac{2x - 6}{3x - 1}$  かつ  $y = \frac{x + 9}{4}$  なので、

$$\begin{aligned} \frac{2x - 6}{3x - 1} &= \frac{x + 9}{4}, \\ (3x - 1)(x + 9) &= 4(2x - 6), \\ 3x^2 + 18x + 15 &= 0, \\ x^2 + 6x + 5 &= 0, \\ (x + 1)(x + 5) &= 0, \end{aligned}$$

よって  $x = -1$  または  $x = -5$ 。どちらのときも  $x \neq \frac{1}{3}$ 。  $y = \frac{x + 9}{4}$  より、 $x = -1$  のとき  $y = 2$ 。  $x = -5$  のとき  $y = 1$ 。共有点は  $(-1, 2)$  と  $(-5, 1)$  とである。

終

**問題 4.10.3**  $xy$ 座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = \frac{7x + 3}{2x - 3}$  ( $x \neq \frac{3}{2}$ ) のグラフと  $x$  の関数  $y = \frac{x + 9}{3}$  のグラフとの共有点を求めなさい。