

§ 4.1 関数の意味

変数 y が変数 x の**関数** (function) であるとは、 x の値を定めるとそれに応じて y の値が唯一つに定まることです。

例 変数 x の値と変数 y の値とについて $y = 2x + 3$ となるとき、

$$x = 0 \text{ のとき } y = 3, \quad x = 1 \text{ のとき } y = 5, \quad x = 3 \text{ のとき } y = 9,$$

というように、 x の値を定めるとそれに応じて y の値が唯一つに定まります。よって y は x の関数です。 終

例 変数 u の値と変数 v の値とについて $v = \frac{1}{2}u^2$ となるとき、

$$u = 1 \text{ のとき } v = \frac{1}{2}, \quad u = 2 \text{ のとき } v = 1, \quad u = 4 \text{ のとき } v = 8,$$

というように、 u の値を定めるとそれに応じて v の値が唯一つに定まります。よって v は u の関数です。 終

変数 x の値と変数 y の値とについて、例えば、

$$y = 3x^2 - 5x + 4 \text{ とか, } y = 2x^3 \text{ とか, } y = \frac{6}{x} \text{ とか}$$

になるとき、 y は x の関数です。このように、変数 y が変数 x の関数であるとき、 x の値と y の値との関係はしばしば次の形の方程式で表されます：

$$y = (x \text{ を含む式}).$$

この形の方程式で表される関数を一般的に $y = f(x)$ と書き表します；ここで $f(x)$ は変数 x を含む式を一般的に表します。そして、 $f(x)$ に含まれる変数 x に例えば 3 を代入したときの値を $f(3)$ と書き表します。

例 変数 x が現れる式 $f(x)$ を $f(x) = x^2 - 3x$ とおくと次のようになります：

$$f(5) = 5^2 - 3 \cdot 5 = 10,$$

$$f(-4) = (-4)^2 - 3(-4) = 28,$$

$$f(a-2) = (a-2)^2 - 3(a-2) = a^2 - 7a + 10. \quad \text{終}$$

変数 y が変数 x の関数であるとき、 x を**独立変数** (independent variable) といい、 y を**従属変数** (dependent variable) といいます。独立変数の値を定めると従属変数の値は一つに定まります。変数 x の関数 $y = f(x)$ を考えるとき、変数 x が独立変数で変数 y が従属変数です。

例 変数 u の関数 $v = u^2 - 3u + 2$ を考えるとき、変数 u が独立変数で変数 v が従属変数です。この関数について、

$$u = 4 \text{ のとき } v = 4^2 - 3 \cdot 4 + 2 = 6,$$

$$u = \sqrt{5} \text{ のとき } v = \sqrt{5}^2 - 3\sqrt{5} + 2 = 7 - 3\sqrt{5},$$

$$u = 2a + 3 \text{ (} a \text{ は定数) のとき } v = (2a + 3)^2 - 3(2a + 3) + 2 = 4a^2 + 6a + 2. \quad \text{終}$$

問題 4.1.1 変数 t の関数 $u = t^2 - 3t + 4$ について、 $t = -2$ のときの値と、 $t = \sqrt{6}$ のときの値と、 $t = 2a - 3$ (a は定数) のときの値とを求めなさい。

本書では、独立変数の値も従属変数の値も実数であるような関数を扱います。そこで、特に断りが無い限り、関数を表す式に表れる変数は実数を表します。