

§3.7 連立方程式

変数 x と y とが現れる等式に対して、その等式が x, y に関する条件を表すと考えるときに、その等式を x, y に関する (x, y についての) 方程式といいます。複数の方程式に対して、各々が表す条件を“かつ”で結んだ条件を考えると、それらの方程式を連立するといいます。

例解 変数 x と y とに関する2個の方程式 $2x+y=7$ と $3x-2y=0$ とを連立するとは、それら(が表す条件)を“かつ”で結んだ条件

$$2x+y=7 \text{ かつ } 3x-2y=0$$

を考えることです。この連立方程式を

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$$

と書き表すことがあります。この連立方程式を解きます。 $2x+y=7$ より $y=7-2x$ 、この等式と方程式 $3x-2y=0$ より

$$3x-2(7-2x)=0,$$

この方程式を解くと $x=2$ 。 $y=7-2x$ より $y=3$ 。故に、連立方程式

$$2x+y=7 \text{ かつ } 3x-2y=0$$

を解くと、 $x=2$ かつ $y=3$ 。このように、連立方程式

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$$

を解くとは、同値で最も簡単な連立方程式

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

を導くことです。 終

例題 複素数を表す変数 x, y, z に関する次の3元連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 2x+y-z=-8 & \cdots (1) \\ -x+2y+3z=9 & \cdots (2) \\ 3x-4y-z=1 & \cdots (3) \end{cases}.$$

【解説】 (1) - (3) として z を消去する：

$$-x+5y=-9. \tag{4}$$

また、(2) + (3) × 3 として z を消去する：

$$8x-10y=12. \tag{5}$$

(4) × 2 + (5) として y を消去すると $6x=-6$ 、従って $x=-1$ 。等式 (4) より

$$5y=-9+x=-9-1=-10,$$

従って $y=-2$ 。等式 (1) より

$$z=2x+y+8=-2-10+8=-4.$$

与えられた連立方程式を解くと、 $x=-1$ かつ $y=-2$ かつ $z=4$ 。 終

問題 3.7.1 複素数を表す変数 x, y, z に関する次の3元連立方程式を解きなさい：

$$\begin{cases} 3x-6y+5z=5 \\ 4x+2y-z=1 \\ 7x-4y+8z=2 \end{cases}.$$

連立方程式を構成する方程式のうちの片方が1次方程式で他方が2次方程式であるときを扱います。

例題 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 3x-2y-1=0 \\ 2y^2-3x^2=3y-4x+5 \end{cases}.$$

【解答】 $3x-2y-1=0$ より $y=\frac{3x-1}{2}$ 。この等式と $2y^2-3x^2=3y-4x+5$ とより、

$$2\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2-3x^2=3\frac{3x-1}{2}-4x+5,$$

$$\frac{9x^2-6x+1}{2}-3x^2=\frac{9x-3}{2}-4x+5,$$

$$9x^2-6x+1-6x^2=9x-3-8x+10,$$

$$3x^2-7x-6=0,$$

$$(x-3)(3x+2)=0,$$

$$x=3 \text{ または } x=-\frac{2}{3}.$$

$y=\frac{3x-1}{2}$ なので、 $x=3$ のとき $y=4$ 、 $x=-\frac{2}{3}$ のとき $y=-\frac{3}{2}$ 。故に、与えられた連立方程式を解くと、

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}.$$
 終

問題 3.7.2 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解きなさい：

$$\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 2x^2-3y^2=3x+10y+13 \end{cases}.$$

例題 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式³⁾を解く：

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 2xy+3x=2y+4 \end{cases}.$$

【解説】 $x+2y=8$ より $x=8-2y$ 。この等式と等式 $2xy+3x=2y+4$ とより、

$$2(8-2y)y+3(8-2y)=2y+4,$$

$$16y-4y^2+24-6y=2y+4,$$

$$-4y^2+8y+16=0,$$

$$\frac{1}{2}y^2-y-2=0,$$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-(-4)}}{1}=1\pm\sqrt{5}.$$

$x=8-2y$ なので、

$$y=1\pm\sqrt{5} \text{ のとき } x=8-2y=8-2(1\pm\sqrt{5})=6\mp 2\sqrt{5} \text{ (複号同順)}. \tag{終}$$

与えられた連立方程式を解くと、 $x=6\pm 2\sqrt{5}$ かつ $y=1\mp\sqrt{5}$ (複号同順)。

問題 3.7.3 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解きなさい：

$$\begin{cases} x+3y=2 \\ x^2+2xy=3x+7y+4 \end{cases}.$$

例題 複素数を表す変数 a, b に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 2a-3b=1 \\ ab+b^2-3a-b=-14 \end{cases}$$

$2a-3b=1$ より $a=\frac{3b+1}{2}$ 。この等式と等式 $ab+b^2-3a-b=-14$ とより、

$$\frac{3b+1}{2}\cdot b+b^2-3\cdot\frac{3b+1}{2}-b=-14,$$

$$3b^2+b+2b^2-9b-3-2b=-28,$$

$$5b^2-10b+25=0,$$

$$\frac{1}{2}b^2-b+\frac{5}{2}=0,$$

$$b=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}}=1\pm\sqrt{-4}=1\pm\sqrt{4}i=1\pm 2i.$$

$a=\frac{3b+1}{2}$ なので、

$$b=1\pm 2i \text{ のとき } a=\frac{3b+1}{2}=\frac{3(1\pm 2i)+1}{2}=\frac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i \text{ (複号同順)}. \tag{終}$$

与えられた連立方程式を解くと、 $a=2\pm 3i$ かつ $b=1\pm 2i$ (複号同順)。

問題 3.7.4 複素数を表す変数 a, b に関する次の連立方程式を解きなさい：

$$\begin{cases} 3a-2b=4 \\ a^2+2ab-2b^2-4b=4 \end{cases}.$$

³⁾ x と y との両方が未知数なので下段の方程式 $2xy+3x=2y+4$ の項 $2xy$ は x について1次と y について1次との併せて2次です。よって下段の方程式 $2xy+3x=2y+4$ は2次方程式です。