

§3.6 整方程式

x の整式 $P(x)$ について、 x に関する方程式で $P(x) = 0$ の形に整理できるものを整方程式といいます。 x の整式 $P(x)$ が n 次式であるとき、 x に関する方程式で $P(x) = 0$ の形に整理できるものを n 次方程式といいます。つまり、1 次方程式、2 次方程式、3 次方程式、 \dots を併せて整方程式といいます。

3 以上の次数の整方程式を解く方法の一つは因数分解することです。そのために 2.4 節で述べた因数定理をよく用います： x の整式 $P(x)$ 及び任意の複素数 α について

$$P(\alpha) = 0 \iff 1 \text{ 次式 } x - \alpha \text{ は } P(x) \text{ の因数である} .$$

定数 α 及び x の整式 $P(x)$ について次のことがいえました：

$$\alpha \text{ が } x \text{ に関する方程式 } P(x) = 0 \text{ の解である} \iff P(\alpha) = 0 .$$

故に、任意の整式 $P(x)$ 及び任意の複素数 α について次の 3 条件は互いに同値になります：

- (1) $P(\alpha) = 0$ ；
- (2) $x - \alpha$ は $P(x)$ の因数である；
- (3) α は x の方程式 $P(x) = 0$ の解である。

定理 1.1.1 を複素数で考えます：任意の複素数 α と β について

$$\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0 .$$

このことを用いて 3 次方程式を解きます。

例解 因数分解によって複素数を表す変数 x に関する 3 次方程式 $x^3 + 3x^2 - 3x - 5 = 0$ を解きます。 $x = -1$ のとき $x^3 + 3x^2 - 3x - 5 = 0$ ですから、因数定理より、整式 $x^3 + 3x^2 - 3x - 5$ は $x + 1$ で割り切れます。実際に割ると整商は $x^2 + 2x - 5$ です：

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 5 = (x + 1)(x^2 + 2x - 5) .$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 5 \\ x + 1 \overline{) x^3 + 3x^2 - 3x - 5} \\ \underline{x^2 + x} \\ 2x^2 - 3x \\ \underline{2x^2 + 2x} \\ -5x - 5 \\ \underline{-5x - 5} \\ 0 \end{array}$$

定理 1.1.1 を用いると

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 3x - 5 = 0 &\iff (x + 1)(x^2 + 2x - 5) = 0 \\ &\iff x + 1 = 0 \text{ または } x^2 + 2x - 5 = 0 . \end{aligned}$$

2 次方程式 $x^2 + 2x - 5 = 0$ を解きます： $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2} = 0$ ですから、解の公式より、

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+5}}{1} = -1 \pm \sqrt{6} ;$$

従って

$$x^2 + 2x - 5 = 0 \iff x = -1 + \sqrt{6} \text{ または } x = -1 - \sqrt{6} .$$

故に

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 3x - 5 = 0 &\iff x + 1 = 0 \text{ または } x^2 + 2x - 5 = 0 \\ &\iff x = -1 \text{ または } x = -1 + \sqrt{6} \text{ または } x = -1 - \sqrt{6} . \end{aligned}$$

つまり、3 次方程式 $x^3 + 3x^2 - 3x - 5 = 0$ の解は -1 と $-1 + \sqrt{6}$ と $-1 - \sqrt{6}$ との 3 個です。 終

一般的に議論します。 x の 3 次式 $A(x)$ に対して、 $A(\alpha) = 0$ となる複素数 α が見つかったとします。すると、因数定理より、 $A(x)$ は $x - \alpha$ で割り切れます。 $A(x)$ を $x - \alpha$ で割った整商を $B(x)$ とおきます：

$$A(x) = (x - \alpha)B(x) .$$

定理 1.1 より

$$A(x) = 0 \iff (x - \alpha)B(x) = 0 \iff x - \alpha = 0 \text{ または } B(x) = 0 .$$

3 次式 $A(x)$ を 1 次式 $x - \alpha$ で割った整商 $B(x)$ は 2 次式です。従って方程式 $B(x) = 0$ は 2 次方程式です。この 2 次方程式を解くと、3 次方程式 $A(x) = 0$ の α 以外の解を求めることができます。

例題 複素数を表す変数 t に関する 3 次方程式 $t^3 - t + 6 = 0$ を解く。

【解説】 $t = -2$ のとき $t^3 - t + 6 = 0$ なので、因数定理より、整式 $t^3 - t + 6$ は $t + 2$ で割り切れる：

$$t^3 - t + 6 = (t + 2)(t^2 - 2t + 3) .$$

方程式 $t^3 - t + 6 = 0$ より $(t + 2)(t^2 - 2t + 3) = 0$ なので、

$$t + 2 = 0 \text{ または } t^2 - 2t + 3 = 0 .$$

2 次方程式 $t^2 - 2t + 3 = 0$ を解く： $\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{3}{2} = 0$ なので、解の公式により、

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1-3}}{1} = 1 \pm \sqrt{-2} = 1 \pm \sqrt{2}i .$$

従って、与えられた方程式の解は $-2, 1 \pm \sqrt{2}i$. 終

問題 3.6.1 複素数を表す変数 x に関する以下の方程式を解きなさい。

$$(1) 3x^3 = x(5x + 2) . \quad (2) 2x^2(x - 1) = 7x - 6 . \quad (3) x^3 = -8 .$$

定理 1.1.1 より更に次のことが導かれます：任意の複素数 α と β と γ について、

$$\alpha\beta\gamma = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0 \text{ または } \gamma = 0 .$$

例題 4 と -2 と -3 とを解とする x に関する 3 次方程式の一つを求める。

【解説】 x に関する方程式の解が 4 と -2 と -3 とであることは、方程式を解いた結果が “ $x = 4$ または $x = -2$ または $x = -3$ ” となることである。

$$x = 4 \text{ または } x = -2 \text{ または } x = -3$$

$$\iff x - 4 = 0 \text{ または } x + 2 = 0 \text{ または } x + 3 = 0$$

$$\iff (x - 4)(x + 2)(x + 3) = 0 \iff (x^2 - 2x - 8)(x + 3) = 0$$

$$\iff x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0 .$$

4 と -2 と -3 とを解とする x に関する 3 次方程式の一つは $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$ である。 終

問題 3.6.2 -2 と $3 + \sqrt{7}$ と $3 - \sqrt{7}$ とを解とする x に関する 3 次方程式の一つ求めなさい。右辺は 0 にして、左辺は降冪の順に整理された x の 3 次式にきなさい。

代数学の基本定理

私達はこれまで、方程式が解を持つように、有理数から実数へ、更に複素数へと、数の範囲を拡張してきました。そして、係数が実数である 2 次方程式は、複素数の範囲で必ず解があることが分かりました。それでは、係数が複素数である 2 次方程式ではどうなるのでしょうか。さらに、3 次方程式や 4 次方程式などではどうなるのでしょうか。そのような方程式の解を考えるためには、数の範囲を更に拡張しなければならないのでしょうか。

実は、係数が複素数である整方程式は、次数がいくら高くても、必ず複素数の解があります。この事実を代数学の基本定理といいます。それは 19 世紀前半の大数学者ガウスによって証明されました。

定理 (代数学の基本定理) 係数が複素数である任意の整方程式には複素数の解がある。

この代数学の基本定理によると、整方程式を解くという要求に関する限り、複素数の範囲内で総て間に合うことになります。

但し、方程式が解を持つことと、その方程式の解を実際に求めることができることは、別のことです。方程式が解を持つことが分かっている、実際にはその解を求めることができないこともあります。