

### §3.2 2次方程式の解

変数  $x$  に関する2次方程式とは次の形に整理できる方程式のことです：

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a, b, c \text{ は } x \text{ と無関係な定数で } a \neq 0).$$

係数が実数である2次方程式を解くことを考えます。そのために次のような式変形が重要になります： $x$  の2次式  $x^2 \pm \square x$  ( $\square$  は  $x$  の係数) に  $\left(\frac{\square}{2}\right)^2$  を加えて、乗法公式  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$  (複号同順) を適用すると、

$$x^2 \pm \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 \pm 2 \cdot \frac{\square}{2} x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{\square}{2}\right)^2 \quad (\text{複号同順}).$$

定理1.8.2を思い起こして下さい：

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } a = \sqrt{a^2}.$$

定理1.3.2は複素数についてもそのまま成り立ちます：複素数  $\alpha$  と  $\beta$  とについて、

$$\alpha^2 = \beta^2 \iff \alpha = \pm \beta.$$

**例解** 複素数を表す変数  $x$  に関する2次方程式  $2x^2+10x+9=0$  を解きます。まず  $x^2$  の係数を1にするために両辺を2で割ります：

$$x^2+5x+\frac{9}{2}=0.$$

両辺から  $\frac{9}{2}$  を引くと

$$x^2+5x=-\frac{9}{2}.$$

等式の左辺を  $x^2 + \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2} x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2$  のような形にします。そのために  $x$  の係数5の  $\frac{1}{2}$  の2乗  $\left(\frac{5}{2}\right)^2$  を両辺に足します：

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

するとこの等式の左辺は  $x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2 = x^2+2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2$  で、右辺は  $-\frac{9}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \frac{25}{4} = \frac{7}{4}$  ですから、

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}.$$

定理1.8.2より  $\frac{7}{4} = \sqrt{\frac{7}{4}^2}$  なので、

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{7}{4}^2}.$$

定理1.3.2より、

$$x+\frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{7}{4}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

両辺から  $\frac{5}{2}$  を引くと

$$x = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{7}}{2} = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

このように等式  $2x^2+10x+9=0$  から等式  $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$  が導かれて、この間に現れる等式は元の方程式と同値です：

$$\begin{aligned} 2x^2+10x+9=0 &\iff x^2+5x+\frac{9}{2}=0 \iff x^2+5x=-\frac{9}{2} \\ &\iff x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &\iff x^2+2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \iff \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{7}{4}^2} \\ &\iff x+\frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{7}{4}} \iff x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \\ &\iff x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}. \end{aligned}$$

故に、 $x$  に関する方程式  $2x^2+10x+9=0$  を解くと  $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$ . 終

2次方程式が解は虚数になることもあります。1.8節において負の数の根号の定義を述べました：実数  $a$  について、 $a < 0$  のとき  $\sqrt{a} = \sqrt{-a}i$ 。

**例解** 複素数を表す変数  $x$  に関する2次方程式  $4x^2-12x+29=0$  を解きます。まず  $x^2$  の係数を1にするために両辺を4で割って

$$x^2-3x+\frac{29}{4}=0,$$

両辺から  $\frac{29}{4}$  を引いて

$$x^2-3x=-\frac{29}{4}.$$

等式の左辺を  $x^2 - \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2} x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{\square}{2}\right)^2$  のような形にするために、両辺に  $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$  を足します：

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4} + \frac{9}{4},$$

左辺は  $x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2-2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2$  で、右辺は定理1.8.2より  $-\frac{29}{4} + \frac{9}{4} = -5 = \sqrt{-5}^2$  なので、

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = \sqrt{-5}^2.$$

定理1.3.2より

$$x-\frac{3}{2} = \pm \sqrt{-5};$$

1.8節で述べたように  $\sqrt{-5} = \sqrt{-(-5)}i = \sqrt{5}i$  なので、

$$x-\frac{3}{2} = \pm \sqrt{5}i,$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i.$$

このように等式  $2x^2-6x+\frac{29}{2}=0$  から等式  $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$  が導かれて、この間に現れる等式は元の方程式と同値です：

$$\begin{aligned} 4x^2-12x+29=0 &\iff x^2-3x+\frac{29}{4}=0 \iff x^2-3x=-\frac{29}{4} \\ &\iff x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &\iff x^2-2 \cdot \frac{3}{2} x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -5 \\ &\iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = \sqrt{-5}^2 \iff x-\frac{3}{2} = \pm \sqrt{-5} \\ &\iff x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i. \end{aligned}$$

つまり  $x$  に関する方程式  $4x^2-12x+29=0$  を解くと  $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$ . 終

このような方法で2次方程式を解くとき、導かれる等式は総て元の方程式と同値です。ですから導かれた結果は元の方程式と同値です。

**例題** 複素数を表す変数  $x$  に関する方程式  $5x^2=2-6x$  を解く。

方程式  $5x^2=2-6x$  より、

$$5x^2+6x=2,$$

$$x^2+\frac{6}{5}x=\frac{2}{5},$$

$$x^2+2 \cdot \frac{3}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25} = \frac{19}{25},$$

$$\left(x+\frac{3}{5}\right)^2 = \sqrt{\frac{19}{25}}^2,$$

$$x+\frac{3}{5} = \pm \sqrt{\frac{19}{25}} = \pm \frac{\sqrt{19}}{5},$$

故に  $x = -\frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$ . 終

**問題 3.2.1** 複素数を表す変数  $x$  に関する方程式  $3x^2=1-5x$  を解きなさい。

**例題** 複素数を表す変数  $x$  に関する方程式  $x^2+34=10x$  を解く。

方程式  $x^2+34=10x$  より、

$$x^2-10x=-34,$$

$$x^2-2 \cdot 5x+5^2 = -9,$$

$$(x-5)^2 = \sqrt{-9}^2,$$

$$x-5 = \pm \sqrt{-9} = \pm \sqrt{9}i = \pm 3i,$$

故に  $x = 5 \pm 3i$ . 終

**問題 3.2.2** 複素数を表す変数  $x$  に関する方程式  $3x^2+\frac{20}{3}=8x$  を解きなさい。

定理1.1.1を複素数で考えます：任意の複素数  $\alpha$  と  $\beta$  とについて

$$\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0.$$

このことを用いて2次方程式を解きます。

**例題** 実数を表す定数  $k$  に対して、実数を表す変数  $x$  に関する方程式

$$x^2+(3k-2)x+6k-8=0 \text{ を解く.}$$

【解説】  $x$  の2次式  $x^2+(3k-2)x+6k-8$  は  $k$  についてみると高々1次の式なので、 $k$  について整理して因数分解する：

$$\begin{aligned} x^2+(3k-2)x+6k-8 &= (3x+6)k+x^2-2x-8 = 3(x+2)k+(x+2)(x-4) \\ &= (x+2)(3k+x-4) = (x+2)(x+3k-4). \end{aligned}$$

従って、定理1.1.1を用いると、

$$x^2+(3k-2)x+6k-8=0 \iff (x+2)(x+3k-4)=0$$

$$\iff x+2=0 \text{ または } x+3k-4=0$$

$$\iff x=-2 \text{ または } x=-3k+4.$$

$x$  に関する方程式  $x^2+(3k-2)x+6k-8=0$  の解は  $-2$  と  $-3k+4$  とである。 終

**問題 3.2.3** 実数を表す定数  $a$  に対して、実数を表す変数  $x$  に関する方程式  $2x^2=(4a+1)x-6a+3$  を解きなさい。

与えられた方程式の解を求めてきましたが、逆に与えられた数を解とする方程式を求めることを考えます。定理1.1.1を用います：任意の複素数  $\alpha$  と  $\beta$  とについて、

$$\alpha = 0 \text{ または } \beta = 0 \iff \alpha\beta = 0.$$

**例題** 3 と  $-2$  とを解とする  $x$  に関する2次方程式を一つ求める。

【解説】  $x$  に関する方程式の解が3と $-2$ とであることは、方程式を解いた結果が“ $x=3$  または  $x=-2$ ”となることである。

$$x=3 \text{ または } x=-2 \iff x-3=0 \text{ または } x+2=0$$

$$\iff (x-3)(x+2)=0$$

$$\iff x^2-x-6=0.$$

3 と  $-2$  とを解とする  $x$  に関する2次方程式の一つは  $x^2-x-6=0$  である。 終

**問題 3.2.4**  $-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  と  $-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$  とを解とする  $x$  に関する2次方程式を一つ求めなさい。右辺は0にして、左辺は降幕の順に整理された  $x$  の2次式にしなさい。