

### §3.10 恒等式

例として  $x$  の整式  $(x-2)(2x-3)$  を展開します：

$$(x-2)(2x-3) = 2x^2 - 7x + 6 .$$

ここで、文字  $x$  が現れるこの等式は、 $x$  の値がどんな数でも  $(x-2)(2x-3) = 2x^2 - 7x + 6$  となることを意味します。

このように、例えば文字  $x$  が現れる等式について、任意の数  $x$  についてその等式が成り立つ（と考える）とき、その等式を  $x$  に関する（ $x$  についての）**恒等式**といいます。

**例**  $x$  の3次式  $2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$  を2次式  $x^2 - x + 3$  で割ると整商が  $2x - 3$  で剰余が  $-2x + 1$  になります。このことを式で表すと次の等式になります：

$$2x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = (2x - 3)(x^2 - x + 3) - 2x + 1 .$$

この等式は、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = (2x - 3)(x^2 - x + 3) - 2x + 1$$

となることを意図しています；つまり  $x$  に関する恒等式です。 終

方程式も恒等式も等式ですが、対照的な概念です。

$x$  に関する方程式とは  $x$  の値がある条件を満たす数のときに成り立つ等式のことです、

$x$  に関する恒等式とは  $x$  の値がどんな数でも成り立つ等式のことです。

**例解** 定数  $a, b$  について、等式  $ax + b = 2x + 3$  が  $x$  に関する恒等式になるとします。つまり、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

とします。等式  $ax + b = 2x + 3$  において  $x = 0$  とすると、

$$a \cdot 0 + b = 2 \cdot 0 + 3 ,$$

つまり  $b = 3$ 。等式  $ax + b = 2x + 3$  において  $x = 1$  とすると、

$$a \cdot 1 + b = 2 \cdot 1 + 3 ,$$

つまり  $a + b = 5$ 。このことと  $b = 3$  とより、 $a + 3 = 5$ 、 $a = 2$ 。こうして次のことが分かります：

等式  $ax + b = 2x + 3$  が  $x$  に関する恒等式 ならば  $a = 2$  かつ  $b = 3$ 。

逆に、 $a = 2$  かつ  $b = 3$  のとき、明らかに、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

です；つまり、このとき等式  $ax + b = 2x + 3$  は  $x$  に関する恒等式です：

$a = 2$  かつ  $b = 3$  ならば 等式  $ax + b = 2x + 3$  は  $x$  に関する恒等式。

以上のことをまとめる：

$$ax + b = 2x + 3 \text{ が } x \text{ に関する恒等式 } \iff a = 2 \text{ かつ } b = 3 . \quad \text{終}$$

この例を一般化すると次の定理が証明できます。

**定理 3.10.1** 定数  $a, b, p, q$  は変数  $x$  と無関係とする。高々1次の  $x$  の整式  $ax + b$  と  $px + q$  とについて、

$$\text{等式 } ax + b = px + q \text{ が } x \text{ に関する恒等式 } \iff a = p \text{ かつ } b = q .$$

**例題** 等式  $a(x+2) + b(x-3) = 3x + 16$  が  $x$  に関する恒等式になるように定数  $a$  と  $b$  の値を定める。

【方針】 左辺を  $x$  について整理して定理3.10.1を用いる。

【解説】 左辺を  $x$  について整理すると

$$a(x+2) + b(x-3) = (a+b)x + 2a - 3b .$$

従って、等式

$$(a+b)x + 2a - 3b = 3x + 16$$

が  $x$  に関する恒等式になればよい。その条件は、左辺と右辺の係数を比べて、

$$a + b = 3 \text{ かつ } 2a - 3b = 16 .$$

これらの  $a$  と  $b$  とに関する方程式を解くと、 $a = 5$ 、 $b = -2$ 。 終

**問題 3.10.1** 等式  $a(2x-3) + b(x+4) = 4x - 17$  が  $x$  に関する恒等式になるように定数  $a$  と  $b$  の値を定めなさい。

高々2次の整式についても同様のことが成り立ちます。

**定理 3.10.2** 定数  $a, b, c, p, q, r$  は変数  $x$  と無関係とする。高々2次の  $x$  の整式  $ax^2 + bx + c$  と  $px^2 + qx + r$  とについて、

$$\text{等式 } ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r \text{ が } x \text{ に関する恒等式}$$

$$\iff a = p \text{ かつ } b = q \text{ かつ } c = r .$$

この定理の証明は後にします。

**例題** 等式  $2x^2 - 3x - 1 = (x-1)(ax+b) + c$  が  $x$  に関する恒等式になるように定数  $a, b, c$  の値を定める。

【方針】 右辺を  $x$  について整理して定理3.10.2を用いる。

【解説】 右辺を  $x$  について整理すると

$$(x-1)(ax+b) + c = ax^2 + bx - ax - b + c = ax^2 + (b-a)x + c - b .$$

従って、等式

$$2x^2 - 3x - 1 = ax^2 + (b-a)x + c - b$$

が  $x$  に関する恒等式になればよい。その条件は、左辺と右辺の係数を比べて、

$$a = 2 \text{ かつ } b - a = -3 \text{ かつ } c - b = -1 .$$

これらの  $a, b, c$  に関する方程式を解くと、 $a = 2$ 、 $b = -1$ 、 $c = -2$ 。 終

**問題 3.10.2** 等式  $2x^2 - 5 = ax(x-1) + b(x-1) + c$  が  $x$  に関する恒等式になるように定数  $a, b, c$  の値を定めなさい。

**例題** 等式  $2x^2 - 4x + 7 = a(x+p)^2 + q$  が  $x$  に関する恒等式になるように定数  $a, p, q$  の値を定める。

【方針】 右辺を  $x$  について整理して定理3.10.2を用いる。

【解説】 右辺を  $x$  について整理すると

$$a(x+p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q .$$

従って、等式

$$2x^2 - 4x + 7 = ax^2 + 2apx + ap^2 + q .$$

が  $x$  に関する恒等式になればよい。その条件は、左辺と右辺の係数を比べて、

$$a = 2 \text{ かつ } 2ap = -4 \text{ かつ } ap^2 + q = 7 .$$

$a, p, q$  に関するこれらの方程式より、

$$a = 2 , \quad p = \frac{4}{-2a} = -1 , \quad q = 7 - ap^2 = 5 .$$

つまり、 $a = 2$ 、 $p = -1$ 、 $q = 5$ 。 終

**問題 3.10.3** 等式  $2x^2 - 6x + 7 = a(x+p)^2 + q$  が  $x$  に関する恒等式になるように定数  $a, p, q$  の値を定めなさい。

等式に現れる複数の文字に着目することもあります。例えば等式に現れる文字  $x$  と  $y$  とに着目すると、 $x$  と  $y$  との値が何であってもその等式が成り立つ（と考える）とき、その等式を  $x$  と  $y$  とに関する恒等式といいます。

#### ——— 定理の証明

**補助定理** 定数  $a, b, c$  は  $x$  と無関係とする。高々2次の  $x$  の整式  $ax^2 + bx + c$  について、等式  $ax^2 + bx + c = 0$  が  $x$  に関する恒等式ならば  $a = b = c = 0$ 。

**証明** まず、等式  $ax^2 + bx + c = 0$  が  $x$  に関する恒等式であると仮定する。つまり、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax^2 + bx + c = 0$$

とする。恒等式  $ax^2 + bx + c = 0$  において  $x = 0$  とすると、

$$c = 0 . \quad (1)$$

恒等式  $ax^2 + bx + c = 0$  において  $x = 1$  とすると、

$$a + b + c = 0 . \quad (2)$$

恒等式  $ax^2 + bx + c = 0$  において  $x = -1$  とすると、

$$a - b + c = 0 . \quad (3)$$

$a, b, c$  に関する方程式 (1), (2), (3) より  $a = b = c = 0$ 。 (証明終り)

**定理** 定数  $a, b, c, p, q, r$  は  $x$  と無関係とする。高々2次の  $x$  の整式  $ax^2 + bx + c$  と  $px^2 + qx + r$  とについて、

$$\text{等式 } ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r \text{ が } x \text{ に関する恒等式}$$

$$\iff a = p \text{ かつ } b = q \text{ かつ } c = r .$$

**証明** まず、等式  $ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$  が  $x$  に関する恒等式であると仮定する。移項すると  $ax^2 + bx + c - (px^2 + qx + r) = 0$ 、左辺を整理すると

$$(a-p)x^2 + (b-q)x + c-r = 0 ;$$

この等式が  $x$  に関する恒等式である。従って、補助定理より  $a-p = b-q = c-r = 0$ 。故に、 $a = p$ 、 $b = q$ 、 $c = r$ 。

逆に、 $a = p$ 、 $b = q$ 、 $c = r$  と仮定する。このとき、明らかに、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r .$$

つまり、等式  $ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$  は  $x$  に関する恒等式である。 (証明終り)