§2.5　整式の因数分解

例えば　$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$　のように，整数を因数（約数）の積の形に分解することを，因数分解といいました．　同じように，整式を因数（約数）の積の形に分解することを（整式の）**因数分解**といいます．　正確には次のようになります：

整式の因数分解とはより低い次数の整式の積の形に変形することである．

例解　x の 2 次式 $5x^2-10x-15$ について

$$5x^2-10x-15 = 5(x^2-2x-3) \ .$$

これは右辺の因数 x^2-2x-3 が 2 次式なので整式の因数分解ではありません．
$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ なので，

$$5x^2-10x-15 = 5(x+1)(x-3) \ ;$$

これで右辺は 1 次式の積（と定数の積）の形なので，これは因数分解です．　**終**

例解　x の整式 $\dfrac{1}{3}x^2-3$ を因数分解すると

$$\frac{1}{3}x^2-3 = \frac{1}{3}(x^2-9) = \frac{1}{3}(x+3)(x-3) \ .$$

この整式は次のようにも因数分解できます：

$$\frac{1}{3}x^2-3 = \frac{1}{3}(x+3)(x-3) = \left\{\frac{1}{3}(x+3)\right\}(x-3) = \left(\frac{x}{3}+1\right)(x-3) \ ,$$
$$\frac{1}{3}x^2-3 = \frac{1}{3}(x+3)(x-3) = (x+3)\left\{\frac{1}{3}(x-3)\right\} = (x+3)\left(\frac{x}{3}-1\right) \ .$$

これらのどの因数分解も，元の 2 次式 $\dfrac{1}{3}x^2-3$ を 2 個の 1 次式（と定数と）の積に分解していますから，因数分解としてはどれでも構いません．　**終**

因数分解のために，乗法公式を（展開とは逆の向きで）よく用います：任意の数 a, b, c, d, x について，

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \quad \text{（複号同順）} \ ;$$
$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b) \ ;$$
$$x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b) \ ;$$
$$acx^2+(ad+bc)x+bd = (ax+b)(cx+d) \ ;$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \quad \text{（複号同順）} \ ;$$
$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3 \quad \text{（複号同順）} \ .$$

例題　x の整式 $4x^2-7$ を因数分解する．

乗法公式　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　を適用する．

$$4x^2-7 = (2x)^2-\sqrt{7}^2 = \left(2x+\sqrt{7}\right)\left(2x-\sqrt{7}\right) \ .$$

終

例題　x と y との整式 $x^2+xy-6y^2$ を因数分解する．

乗法公式　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$　を適用する．

$$x^2+xy-6y^2 = x^2+(3y-2y)x+(3y)(-2y) = (x+3y)(x-2y) \ .$$

終

例題　x の整式 x^3+125 を因数分解する．

乗法公式　$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$　を適用する．

$$x^3+125 = x^3+5^3 = (x+5)(x^2-5x+25) \ .$$

終

問題 2.5.1　以下の整式を因数分解しなさい．

(1) $9x^2-11$.　　(2) $x^2+3ax-4a^2$.　　(3) y^3-64 .

乗法公式　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$　を適用して因数分解するために，たすき掛けの図式と呼ばれる図式を用います．

例解　x の 2 次式 $3x^2-7x-6$ を因数分解します．　この 2 次式に乗法公式 $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ を適用するためには，

$$ac = 3 \ , \qquad ad+bc = -7 \ , \qquad bd = -6$$

となる a,b,c,d を捜さなければなりません．そのために，$ac=3$, $bd=-6$ となる整数 a,b,c,d に対して，

$$\begin{array}{ccccc} a & \times & b & \to & bc \\ c & & d & \to & \underline{ad} \\ & & & & ad+bc \end{array}$$

のような形の図式を書いて，$ad+bc=-7$ となる a,b,c,d を捜します．この図式をたすき掛けの図式といいます．　$ac=3$, $bd=-6$ となるように

$$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases} , \quad \begin{cases} b=1 \\ d=-6 \end{cases} \quad \text{とすると} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & \times & 1 & \to & 3 \\ 3 & & -6 & \to & \underline{-6} \\ & & & & -3 \end{array} \quad \text{なので} \quad ad+bc = -3$$

となり失敗です．　$ac=3$, $bd=-6$ となるように

$$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases} , \quad \begin{cases} b=-1 \\ d=6 \end{cases} \quad \text{とすると} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & \times & -1 & \to & -3 \\ 3 & & 6 & \to & \underline{6} \\ & & & & 3 \end{array} \quad \text{なので} \quad ad+bc = 3$$

となり失敗です．　$ac=3$, $bd=-6$ となるように

$$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases} , \quad \begin{cases} b=2 \\ d=-3 \end{cases} \quad \text{とすると} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2 & \to & 6 \\ 3 & & -3 & \to & \underline{-3} \\ & & & & 3 \end{array} \quad \text{なので} \quad ad+bc = 3$$

となり失敗です．　$ac=3$, $bd=-6$ となるように

$$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases} , \quad \begin{cases} b=-2 \\ d=3 \end{cases} \quad \text{とすると} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & \times & -2 & \to & -6 \\ 3 & & 3 & \to & \underline{3} \\ & & & & -3 \end{array} \quad \text{なので} \quad ad+bc = -3$$

となり失敗です．　$ac=3$, $bd=-6$ となるように

$$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases} , \quad \begin{cases} b=3 \\ d=-2 \end{cases} \quad \text{とすると} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & \times & 3 & \to & 9 \\ 3 & & -2 & \to & \underline{-2} \\ & & & & 7 \end{array} \quad \text{なので} \quad ad+bc = 7$$

となり失敗です．　$ac=3$, $bd=-6$ となるように

$$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases} , \quad \begin{cases} b=-3 \\ d=2 \end{cases} \quad \text{とすると} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & \times & -3 & \to & -9 \\ 3 & & 2 & \to & \underline{2} \\ & & & & -7 \end{array} \quad \text{なので} \quad ad+bc = -7$$

となり成功です．　従って $3x^2-7x-6$ を因数分解すると

$$3x^2-7x-6 = (x-3)(3x+2) \ .$$

終

問題 2.5.2　以下の整式を因数分解しなさい．

(1) $2x^2-x-6$.　　(2) $4y^2-13y-12$.

整式を因数分解するために，共通因数があればまずそれを括り出します．

例題　x の整式 $3x^2-9x+6$ を因数分解する．

3 を括り出す．

$$3x^2-9x+6 = 3(x^2-3x+2) = 3(x-1)(x-2) \ .$$

終

例題　t の整式 t^3-3t^2-4t を因数分解する．

共通因数 t を括り出す．

$$2t^3-6t^2-8t = 2t(t^2-3t-4) = t(t+1)(t-4) \ .$$

終

問題 2.5.3　以下の整式を因数分解しなさい．

(1) $2x^2-8x+6$.　　(2) $3x^3-16x^2-12x$.

次数が 3 以上の整式を因数分解するためには，しばしば，因数定理を用いて因数を探します．

例解　整式 $x^3+x^2-8x-12$ を因数分解します．
$P(x)=x^3+x^2-8x-12$ とおくと，$P(1)=-18 \neq 0$, $P(-1)=-4 \neq 0$, $P(2)=-16 \neq 0$, $P(-2)=0$;
よって因数定理より $x+2$ は $P(x)$ の因数ですから，$P(x)=x^3+x^2-8x-12$ は $x+2$ で割り切れます．
実際に $x^3+x^2-8x-12$ を $x+2$ で割ると整商は x^2-x-6 ですから，

$$x^3+x^2-8x-12 = (x+2)(x^2-x-6) \ .$$

$$\begin{array}{r} x^2-\ x-\ 6 \\ x+2 \,\big)\, \overline{x^3+\ x^2-8x-12} \\ \underline{x^3+2x^2} \qquad\quad \\ -\ x^2-8x \qquad \\ \underline{-\ x^2-2x} \qquad \\ -6x-12 \\ \underline{-6x-12} \\ 0 \end{array}$$

x の 2 次式 x^2-x-6 は更に因数分解できます：$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$.　従って $x^3+x^2-8x-12$ を因数分解すると

$$\begin{aligned} x^3+x^2-8x-12 &= (x+2)(x^2-x-6) = (x+2)(x+2)(x-3) \\ &= (x+2)^2(x-3) \ . \end{aligned}$$

終

問題 2.5.4　以下の整式を因数分解しなさい．

(1) $x^3-6x^2+5x+12$.　　(2) $t^3-12t+16$.

複数の文字について整式と見なせる式を因数分解するためには，どちらか片方の文字について整理します．

例題　a と b との整式 $6ab+9a-8b-12$ を因数分解する．

整式 $6ab+9a-8b-12$ を b について整理して共通因数を括り出す．

$$\begin{aligned} 6ab+9a-8b-12 &= (6a-8)b+9a-12 = 2(3a-4)b+3(3a-4) \\ &= (3a-4)(2b+3) \ . \end{aligned}$$

終

問題 2.5.5　x と y との整式 $12xy-9x+8y-6$ を因数分解しなさい．

複数の文字について整式と見なせる式を因数分解するとき，着目する文字によって次数が異なるときは，次数が一番低くなる文字に着目して整理します．

例解　整式 $x^2+(3a-2)x+6a-8$ を因数分解します．　この整式は，x についての整式とみると 2 次式ですが，a についての整式とみると高々 1 次式です．　整式 $x^2+(3a-2)x+6a-8$ を a の整式として降冪の順に整理すると

$$x^2+(3a-2)x+6a-8 = x^2+3xa-2x+6a-8 = (3x+6)a+x^2-2x-8 \ .$$

x の整式 x^2-2x-8 は因数分解できます：$x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$.　共通因数 $(x+2)$ を括り出します．

$$\begin{aligned} (3x+6)a+x^2-2x-8 &= 3(x+2)a+(x+2)(x-4) = (x+2)\{3a+(x-4)\} \\ &= (x+2)(x+3a-4) \ . \end{aligned}$$

故に

$$x^2+(3a-2)x+6a-8 = (3x+6)a+x^2-2x-8 = (x+2)(x+3a-4) \ .$$

終

問題 2.5.6　以下の整式を因数分解しなさい．

(1) $x^2+(4a-5)x-8a+6$.　　(2) $x^2y-2x-9y+6$.

複数の文字について整式と見なせる式を因数分解するとき，着目する文字によって次数が同じときは，最高次の係数がなるべく簡単になる文字に着目して整理します．

例解　整式 $3x^2-4xy+y^2+7x-y-6$ を因数分解します．　この整式は，x^2 の係数は 3 で y^2 の係数は 1 です．　そこで y について整理します．

$$3x^2-4xy+y^2+7x-y-6 = y^2-(4x+1)y+3x^2+7x-6 \ .$$

ここで $3x^2+7x-6$ を因数分解します：

$$3x^2+7x-6 = (x+3)(3x-2) \ .$$

よって

$$y^2-(4x+1)y+3x^2+7x-6 = y^2+(-4x-1)y+(x+3)(3x-2) \ .$$

この整式を，ある整式 A, B について　$y^2+(A+B)y+AB=(y+A)(y+B)$　と因数分解するために，

$$AB = (x+3)(3x-2) \ \text{かつ} \ A+B = -4x-1$$

となるようにします：　$A = -(x+3)$,　$B = -(3x-2)$　とすると　$A+B = -(x+3)-(3x-2) = -4x-1$　です．　従って，

$$\begin{aligned} &y^2+(-4x-1)y+(x+3)(3x-2) \\ &= y^2+\{-(x+3)-(3x-2)\}y+\{-(x+3)\}\{-(3x-2)\} \\ &= \{y-(x+3)\}\{y-(3x-2)\} = (y-x-3)(y-3x+2) \\ &= \{-(y-x-3)\}\{-(y-3x+2)\} = (-y+x+3)(-y+3x-2) \\ &= (x-y+3)(3x-y-2) \ . \end{aligned}$$

故に

$$3x^2-4xy+y^2+7x-y-6 = (x-y+3)(3x-y-2) \ .$$

終

問題 2.5.7　整式 $3x^2-4xy+y^2+2x+2y-8$ を因数分解しなさい．

例解　整式 $x^2+4xy+3y^2-x+3y-6$ を因数分解します．　この整式は，x^2 の係数は 1 で y^2 の係数は 3 です．　そこで x について整理します．

$$x^2+4xy+3y^2-x+3y-6 = x^2+(4y-1)x+3y^2+3y-6 \ .$$

ここで $3y^2+3y-6$ を因数分解します：

$$3y^2+3y-6 = 3(y^2+y-2) = 3(y+2)(y-1) \ .$$

よって

$$x^2+(4y-1)x+3y^2+3y-6 = x^2+(4y-1)x+3(y+2)(y-1) \ .$$

この整式を，ある整式 A, B について　$x^2+(A+B)x+AB=(x+A)(x+B)$　と因数分解するために，

$$AB = 3(y+2)(y-1) \ \text{かつ} \ A+B = 4y-1$$

となるようにします：　$A = y+2$,　$B = 3(y-1) = 3y-3$　とすると　$A+B = y+2+3y-3 = 4y-1$　です．　従って，

$$\begin{aligned} x^2+(4y-1)x+3(y+2)(y-1) &= x^2+\{(y+2)+(3y-3)\}x+(y+2)(3y-3) \\ &= \{x+(y+2)\}\{x+(3y-3)\} \\ &= (x+y+2)(x+3y-3) \ . \end{aligned}$$

故に

$$x^2+4xy+3y^2-x+3y-6 = (x+y+2)(x+3y-3) \ .$$

終

問題 2.5.8　整式 $x^2+3xy+2y^2-4x-2y-12$ を因数分解しなさい．

整式を因数分解するするとその整式の約数（因数）が分かります．

例解　整数　$2 \times 3 \times 5 = 30$　の正の約数は，1 と 2 と 3 と 5 と $2 \times 3 = 6$ と $2 \times 5 = 10$ と $3 \times 5 = 15$ と $2 \times 3 \times 5 = 30$ との 8 個があります．　同様に考えると，整式 $(x+2)(x-3)(x-4)$ の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式は，1 と $x+2$ と $x-3$ と $x-4$ と $(x+2)(x-3) = x^2-x-6$ と $(x+2)(x-4) = x^2-2x-8$ と $(x-3)(x-4) = x^2-7x+12$ と $(x+2)(x-3)(x-4) = x^3-5x^2-2x+24$ との 8 個があります．例えば，

$$(x+2)(x-3)(x-4) = \frac{5}{7}(x+2)(x-3) \times \frac{7}{5}(x-4)$$

なので，　$\dfrac{5}{7}(x+2)(x-3) = \dfrac{5}{7}x^2-\dfrac{5}{7}x-\dfrac{30}{7}$　とか　$\dfrac{7}{5}(x-4) = \dfrac{7}{5}x-\dfrac{28}{5}$　なども $(x+2)(x-3)(x-4)$ の約数ですが，これらの整式は降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 ではありません．

例題　x の整式　$P(x) = x^3-2x^2-5x+6$　の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める．

〔解説〕　まず $P(x)$ を因数分解する．　$P(1)=0$ なので因数定理より $P(x)$ は $x-1$ で割り切れる．　$P(x)$ を $x-1$ で割ると整商は　$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$　である．従って

$$P(x) = (x-1)(x^2-x-6) = (x-1)(x+2)(x-3) \ .$$

この等式より，$P(x)$ の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式は次の 8 個である：1 , $x-1$, $x+2$, $x-3$, $(x-1)(x+2)$, $(x-1)(x-3)$, $(x+2)(x-3)$, $(x-1)(x+2)(x-3)$.　**終**

問題 2.5.9　x の整式　$P(x) = x^3+2x^2-9x-18$　の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求めなさい．

例題　x の整式　$P(x) = 4x^3-7x-3$　の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める．

〔解説〕　まず $P(x)$ を因数分解する．　$P(-1)=0$　なので因数定理より $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる．　$P(x)$ を $x+1$ で割ると整商は $4x^2-4x-3=(2x+1)(2x-3)$ である．従って

$$P(x) = (x+1)(4x^2-4x-3) = (x+1)(2x+1)(2x-3) \ .$$

この等式より，例えば $(x+1)(2x+1) = 2x^2+3x+1$ は $P(x)$ の約数であるが，最高次の項の係数が 1 でない．　それで次のように変形する：

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)(2x+1)(2x-3) = (x+1) \times 2 \cdot \frac{2x+1}{2} \times 2 \cdot \frac{2x-3}{2} \\ &= 4(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right) \ . \end{aligned}$$

この等式より，$P(x)$ の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式は次の 8 個である：1 , $x+1$, $x+\dfrac{1}{2}$, $x-\dfrac{3}{2}$, $(x+1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$, $(x+1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$, $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$, $(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$.　**終**

問題 2.5.10　x の整式　$P(x) = 6x^3+x^2-10x+3$　の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求めなさい．