

## §2.4 整式の約数と倍数

整数  $a$  と 0 以外の整数  $b$  について、 $a$  を  $b$  で割ると剰余が 0 であるとき、 $b$  は  $a$  を割り切るといい、 $a$  は  $b$  で割り切れるといいいます；更にこのとき、 $a$  は  $b$  の倍数であるといい、 $b$  は  $a$  の約数あるいは因数であるといいいます。

整式  $A$  と 0 以外の整式  $B$  について、 $A$  を  $B$  で割ると剰余が 0 であるとき、 $B$  は  $A$  を割り切るといい、 $A$  は  $B$  で割り切れるといいいます。更にこのとき、 $A$  は  $B$  の**倍数**であるといい、 $B$  は  $A$  の**約数**あるいは**因数**であるといいいます。

整式  $A$  と 0 以外の整式  $B$  について、 $A$  を  $B$  で割るときの剰余とは次のような整式  $R$  のことでした：

$$A = BQ + R \quad (\text{但し } Q \text{ は整式で } R \text{ は } 0 \text{ または } B \text{ より次数が低い整式である}).$$

この剰余  $R$  が 0 であるということは  $A = BQ$  となることですから、

$$\begin{aligned} A \text{ が } B \text{ で割り切れる} &\iff A \text{ を } B \text{ で割るときの剰余が } 0 \text{ である} \\ &\iff A = BQ \text{ となる整式 } Q \text{ がある} \\ &\iff B \text{ は } A \text{ の約数 (因数) である} \\ &\iff A \text{ は } B \text{ の倍数である.} \end{aligned}$$

**例**  $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$  ですから、整式  $x+1$  及び  $x-3$  は整式  $x^2 - 2x - 3$  の約数で、 $x^2 - 2x - 3$  は  $x+1$  の倍数であり  $x-3$  の倍数です。また、

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 7(x+1) \times \frac{1}{7}(x-3) = (7x+7) \left( \frac{x}{7} - \frac{3}{7} \right),$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = \frac{5}{2}(x+1) \times \frac{2}{5}(x-3) = \left( \frac{5}{2}x + \frac{5}{2} \right) \left( \frac{2}{5}x - \frac{6}{5} \right);$$

従って、整式  $7(x+1) = 7x+7$  や  $\frac{5}{2}(x+1) = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$  などは  $x^2 - 2x - 3$  の約数で、整式  $x^2 - 2x - 3$  は  $7x+7$  の倍数であり  $\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$  の倍数です。 終

整式  $A, B, P$  などが文字  $x$  についての整式であることを明示するために、 $A(x)$ 、 $B(x)$ 、 $P(x)$  などと書き表すことがあります。そして、 $x$  の整式  $P(x)$  および数  $\alpha$  に対して、 $x$  に  $\alpha$  を代入したときの  $P(x)$  の値を  $P(\alpha)$  と書き表します。

**例**  $x$  の整式  $A(x) = x^3 - 4x^2 + 15$  において  $x$  に 3 を代入したときの値を  $A(3)$  と書き表します：

$$A(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 15 = 27 - 36 + 15 = 6. \quad \text{終}$$

**例解**  $x$  の整式  $P(x)$  を 1 次式  $x-2$  で割るとします。このとき剰余は 0 または 1 次式  $x-2$  より次数が低い整式ですから、0 または 0 次式です；つまり剰余は定数ですから、 $x$  を含みません。この剰余を  $R$  とおき、整商を  $Q(x)$  とおくと、

$$P(x) = (x-2)Q(x) + R.$$

この等式の両辺の  $x$  に 2 を代入します。このとき  $R$  は  $x$  を含まないので変わりません：

$$P(2) = (2-2)Q(2) + R.$$

この等式の右辺を計算すると

$$(2-2)Q(2) + R = 0 \cdot Q(2) + R = R,$$

よって  $P(2) = R$  .

つまり、 $P(x)$  を  $x-2$  で割るときの剰余  $R$  は  $P(2)$  と等しくなります。実際、例えば

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 7$  を  $x-2$  で割ると剰余は  $-5$  ですが、これは次の値と等しくなります：

$$P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 = 8 - 20 + 7 = -5. \quad \text{終}$$

一般的にいうと次の定理が成り立ちます。

**定理 (剰余定理)**  $x$  の整式  $P(x)$  及び定数  $\alpha$  について、 $P(x)$  を  $x$  の 1 次式  $x-\alpha$  で割るときの剰余は  $P(\alpha)$  <sup>4)</sup> に等しい。

**証明**  $P(x)$  を 1 次式  $x-\alpha$  で割るときの整商を  $Q(x)$  とおき、剰余を  $R$  とおく：

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) + R \quad (\text{但し } R \text{ は } 0 \text{ または } x-\alpha \text{ より次数が低い整式}).$$

剰余  $R$  は、0 または 1 より低い次数の整式なので、0 または 0 次式である；つまり定数である。よって  $R$  は  $x$  を含まない。上の等式において  $x$  に  $\alpha$  を代入すると

$$P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) + R = 0 \cdot Q(\alpha) + R = R;$$

つまり、 $P(x)$  を  $x-\alpha$  で割るときの剰余  $R$  は  $P(\alpha)$  に等しい。 (証明終り)

**例**  $x$  の整式  $x^3 + 2x^2$  を  $x$  の整式  $x+3$  で割るときの剰余を求めます。  $P(x) = x^3 + 2x^2$  とおきま

す。剰余定理より、 $P(x)$  を  $x+3$  で割るときの剰余は  $P(-3)$  の値です。

$$P(-3) = (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 = -27 + 18 = -9.$$

故に  $x^3 + 2x^2$  を  $x+3$  で割るときの剰余は  $-9$  です。実際に  $x^3 + 2x^2$  を  $x+3$  で割っても剰余は  $-9$  です。 終

**問題 2.4.1**  $x$  の整式  $3x^4 + 7x$  を  $x$  の整式  $x+2$  で割るときの剰余を、剰余定理を用いる方法と実際に除算する方法とで求めなさい。

$x$  の整式  $P(x)$  及び定数  $\alpha$  について、 $x$  の 1 次式  $x-\alpha$  が  $P(x)$  が因数であるとは、 $P(x)$  が  $x-\alpha$  で割り切れること、つまり  $P(x)$  を  $B$  で割るときの剰余が 0 になることでした：

$$\begin{aligned} x-\alpha \text{ が } P(x) \text{ の因数である} &\iff P(x) \text{ が } x-\alpha \text{ で割り切れる} \\ &\iff P(x) \text{ を } x-\alpha \text{ で割るときの剰余は } 0 \text{ である.} \end{aligned}$$

剰余定理より、 $P(x)$  を  $x-\alpha$  で割るときの剰余は  $P(\alpha)$  ですから、

$$x-\alpha \text{ が } P(x) \text{ の因数である} \iff P(\alpha) = 0.$$

この事実は因数定理とよばれる重要な定理です。

**定理 (因数定理)**  $x$  の整式  $P(x)$  及び定数  $\alpha$  について、  
 $x-\alpha$  が  $P(x)$  の因数である  $\iff P(\alpha) = 0$  .

因数定理より、 $x$  の整式  $P(x)$  及び定数  $\alpha$  について次のことが成り立ちます：

$$P(\alpha) = 0 \text{ ならば } x-\alpha \text{ は } P(x) \text{ の因数である;} \\ P(\alpha) \neq 0 \text{ ならば } x-\alpha \text{ は } P(x) \text{ の因数でない} \text{ } ^{5)}.$$

**例**  $x$  の 1 次式  $x, x+1, x-1, x+2, x-2$  の各々について、 $x$  の 3 次式  $x^3 - 3x^2 + 4$  の因数であるか否か判定します。  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  とおきます。

$$P(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4 \neq 0,$$

$$P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 = 0,$$

$$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 2 \neq 0,$$

$$P(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 + 4 = -16 \neq 0,$$

$$P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0.$$

因数定理より、 $x+1$  と  $x-2$  とは  $x^3 - 3x^2 + 4$  の因数であり、 $x$  と  $x-1$  と  $x+2$  とは  $x^3 - 3x^2 + 4$  の因数ではありません。 終

**問題 2.4.2**  $x$  の 1 次式  $x, x+1, x-1, x+2, x-2$  の各々について、 $x$  の 4 次式  $x^4 + 5x - 6$  の因数であるか否か判定しなさい。

**例題** 次の条件を満たす  $x$  の 2 次式  $P(x)$  を一つ求める： $P(5) = 0$  かつ  $P(-2) = 0$  . 結果は降冪の順に整理する。

【解説】  $x$  の 2 次式  $P(x)$  について  $P(5) = 0$  かつ  $P(-2) = 0$  とする。因数定理より、1 次式  $x-5$  と  $x+2$  とは  $P(x)$  の因数である。  $x-5$  と  $x+2$  とを因数とする 2 次式の一つは  $(x-5)(x+2)$  , 展開して整理すると

$$(x-5)(x+2) = x^2 - 3x - 10.$$

従って  $P(5) = 0$  かつ  $P(-2) = 0$  となる 2 次式  $P(x)$  の一つは  $x^2 - 3x - 10$  である。 終

**問題 2.4.3** 次の条件を満たす  $x$  の 2 次式  $P(x)$  を一つ求めなさい： $P(4) = 0$  かつ  $P(-3) = 0$  . 結果は降冪の順に整理しなさい。

**例題** 次の条件を満たす  $x$  の 3 次式  $P(x)$  を一つ求める： $P(2) = 0$  かつ  $P(-3) = 0$  かつ  $P(4) = 0$  . 結果は降冪の順に整理する。

【解説】  $x$  の 3 次式  $P(x)$  について  $P(2) = 0$  かつ  $P(-3) = 0$  かつ  $P(4) = 0$  とする。因数定理より、1 次式  $x-2$  と  $x+3$  と  $x-4$  とは  $P(x)$  の因数である。  $x-2$  と  $x+3$  と  $x-4$  とを因数とする 3 次式の一つは  $(x-2)(x+3)(x-4)$  , 展開して整理すると

$$(x-2)(x+3)(x-4) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24.$$

従って  $P(2) = 0$  かつ  $P(-3) = 0$  かつ  $P(4) = 0$  となる 3 次式  $P(x)$  の一つは  $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$  である。 終

**問題 2.4.4** 次の条件を満たす  $x$  の 3 次式  $P(x)$  を一つ求めなさい： $P(2) = 0$  かつ  $P(-3) = 0$  かつ  $P(5) = 0$  . 結果は降冪の順に整理しなさい。

<sup>4)</sup>  $P(\alpha)$  は  $P(x)$  のなかの  $x$  に  $\alpha$  を代入した式ですから、 $P(\alpha)$  の中には  $x$  が現れません；従って、 $P(\alpha)$  を  $x$  の整式とみなすとこれは定数です。

<sup>5)</sup> 因数定理より、“ $x-\alpha$  が  $P(x)$  の因数であれば  $P(\alpha) = 0$ ” です。この対偶をとると、“ $P(\alpha) \neq 0$  ならば  $P(x)$  は  $x-\alpha$  で割り切れない”となります。